

上海交通大学博士学位论文

红移畸变宇宙学研究

博士研究生：陈隽德

学 号：015072910039

导 师：张鹏杰教授

申 请 学 位：博士

学 科：天文学

所 在 单 位：天文系

答 辩 日 期：2021 年 5 月 25 日

授予学位单位：上海交通大学

Dissertation Submitted to Shanghai Jiao Tong University
for the Degree of Doctor

**A STUDY OF
REDSHIFT-SPACE DISTORTION
COSMOLOGY**

Candidate:	Chen Junde
Student ID:	015072910039
Supervisor:	Prof. Zhang Pengjie
Academic Degree Applied for:	Doctor of Philosophy
Speciality:	Astronomy
Affiliation:	Department of Astronomy
Date of Defence:	May 25, 2021
Degree-Confering-Institution:	Shanghai Jiao Tong University

红移畸变宇宙学研究

摘 要

星系红移畸变是由于星系本动速度造成的一种重要的宇宙大尺度结构。结合红移畸变的精确测量和精确模型，能够精确测量宇宙的结构增长率，从而限制暗能量状态方程和宇宙学尺度上的引力性质。第四代暗能量巡天项目将实现红移畸变的精确测量，但是已有红移畸变理论模型的精度尚无法与之匹配。本文结合宇宙学理论、统计和数值模拟，以理解、改善红移畸变理论模型存在的若干问题。

本文第一章简要介绍宇宙学的背景知识。第二章详细介绍主要的红移畸变理论模型，以及已有观测对结构增长率 $f\sigma_8$ 的限制结果。在第三章中，作者提供了一种全新方法，第一次在数值模拟中精确测定了暗晕的速度偏袒。该速度偏袒，如果偏离 1，将直接造成宇宙学系统误差。作者发现在较大尺度 $k \leq 0.1h/\text{Mpc}$ 时，速度偏袒与 1 的偏离在 $\sim 1\%$ 以内，可以被忽略。随着尺度减小，偏离 1 逐渐变得显著，将对基于第四代巡天 DESI 等的红移畸变宇宙学产生显著影响。第四章研究了真实空间到红移空间成团性的映射。该映射决定了红移畸变效应，可以由成对速度的矩母函数 (pairwise velocity moment generating function) 完全刻画。作者通过数值模拟测量了矩母函数，比较了矩展开和累积量 (Cumulant) 展开的精度，发现累积量展开显著优于矩展开。另一个主要发现是，要精确刻画 $k \sim 0.2h/\text{Mpc}$ 的红移畸变，需要包含到 4 阶的累积量展开，这是已有红移畸变模型无法准确描述的。在第五章中，作者尝试从二维红移空间功率谱出发，运用深度学习方法直接得到本动速度功率谱及其宇宙学信息。作者建立了快速生成训练样本的方法，生成了大量训练样本，并展示了初步结果。文章最后为全文总结。

关键词：宇宙学，暗能量，宇宙大尺度结构，红移畸变

A STUDY OF REDSHIFT-SPACE DISTORTION COSMOLOGY

ABSTRACT

Galaxy redshift space distortion (RSD) is a major large scale structure of the universe, induced by peculiar velocity of galaxies. Combining precision measurement and modelling of RSD, we are able to measure the structure growth rate of the universe accurately, and constrain the nature of dark energy and gravity at cosmological scale. Stage IV dark energy projects will be able to measure RSD to high accuracy, beyond that of existing RSD models. This thesis combines the theory, statistics, and numerical simulations of cosmology, in order to understand and overcome several problems in RSD modelling.

The first chapter briefly introduces modern cosmology. Chapter 2 introduces several models of RSD in details, and summarizes existing measurements of the structure growth rate $f\sigma_8$ with RSD. In chapter 3, I propose a novel method, which has enabled the first accurate measurement of halo velocity bias in simulations. At scales larger than $k \leq 0.1h/\text{Mpc}$, the deviation of velocity bias from unity is within $\sim 1\%$ and can be safely neglected. At smaller scales, the deviation becomes larger, and will become significant for RSD cosmology based on DESI observations. Chapter 4 studies the mapping of clustering from real to redshift space, which totally determines RSD. This mapping can be completely described by the pairwise velocity moment generating function. I measure the generating function using simulations and compare the moment expansion against the cumulant expansion. I find that the cumulant expansion is significantly better. Another major finding is that,

to accurately describe RSD to $k \sim 0.2h/\text{Mpc}$, cumulants up to 4th order are required. Existing RSD models fail to include them appropriately. In chapter 5 I attempt to directly learn peculiar velocity and the related cosmological information by deep learning, with direct RSD measurement as input. I design methods of fast generation of training set, generate a large training set, and present preliminary results of deep learning. Chapter 6 summarizes the main results.

KEY WORDS: Cosmology, Dark Energy, Large Scale Structure of Universe, Redshift Space Distortion

目 录

第一章 绪论	1
1.1 宇宙学模型	1
1.1.1 标准宇宙学模型	1
1.1.2 非标准宇宙学模型	5
1.2 宇宙学观测	6
1.2.1 宇宙学距离, 本动速度与红移	7
1.2.2 宇宙学探针	8
1.3 结构增长	15
1.3.1 扰动理论	15
1.3.2 N 体数值模拟与非线性结构形成	17
第二章 红移畸变	23
2.1 理论模型	23
2.1.1 傅立叶空间中的红移畸变模型	23
2.1.2 位形空间中的红移畸变模型	32
2.2 观测与测量	38
2.2.1 限制宇宙学参数的一般过程	38
2.2.2 红移畸变的相关观测	39
第三章 速度偏袒的精确测量	43
3.1 研究背景	43
3.2 测量方法	45
3.2.1 数值模拟	46
3.2.2 尺度依赖的速度偏袒求解方法	47
3.3 计算结果及分析	51
3.3.1 对 k 的依赖	51
3.3.2 对暗晕质量及红移的依赖	53
3.3.3 对暗晕密度偏袒的依赖	55
3.4 对本动速度巡天的启示	57
3.4.1 对结构增长率测量的影响	57
3.4.2 宇宙学检验等效原理的一个方法	59
3.5 对 b_v 测量结果的可能解释	60

3.5.1 高斯化密度场中的速度偏袒	60
3.5.2 小结	62
3.6 结论与讨论	64
第四章 成对速度矩母函数 (Pairwise velocity moment generating function)	
的研究	67
4.1 研究背景	67
4.1.1 基于功率谱的红移畸变模型	68
4.1.2 基于关联函数的红移畸变模型	69
4.1.3 成对速度矩母函数与红移畸变模型的关系	69
4.2 研究方法	71
4.2.1 成对速度矩母函数的矩展开及累积量展开	71
4.2.2 本动速度的分解	73
4.2.3 数值模拟	74
4.3 计算结果及分析	75
4.3.1 必须包含 $\langle v_{12}^{3,4} \rangle$	76
4.3.2 累积量展开更好	78
4.3.3 对红移畸变模型误差的影响	81
4.3.4 本动速度的分解	84
4.4 结论与讨论	86
第五章 本动速度的机器学习及工作展望	89
5.1 研究背景	89
5.1.1 机器学习简介	89
5.1.2 红移畸变中的非线性与非定域问题	90
5.2 研究方法	91
5.2.1 条件生成对抗网络	92
5.2.2 数值模拟	94
5.2.3 生成数据集	96
5.3 结果及分析	96
5.3.1 训练样本为暗物质时的结果	97
5.3.2 训练样本为暗物质与暗晕时的结果	101
5.4 总结、展望与讨论	101
全文总结	103
参考文献	105

附录 A 非标准宇宙学模型	129
A.1 Quintessence 模型	129
A.2 K-essence 模型	130
A.3 Phantom 模型	131
A.4 Quintom 模型	131
A.5 $f(R)$ 理论	131
A.6 DGP 模型	133
附录 B 更多宇宙学探针	135
B.1 弱引力透镜	135
B.2 Ia 型超新星	137
B.3 引力波	138
附录 C 补充数学公式	141
C.1 耦合函数	141
C.2 矩及矩母函数	142
C.3 累积量及累积量母函数	142

插图索引

图 1-1 宇宙的演化历史	3
图 1-2 修改引力模型	5
图 1-3 宇宙微波背景辐射图	8
图 1-4 CMB 温度的角功率谱	9
图 1-5 红移空间中星系的二维关联函数	11
图 1-6 关联函数及功率谱的多极距	12
图 1-7 BAO 测距	13
图 1-8 红移畸变示意图	13
图 1-9 N 体数值模拟切片	20
图 2-1 TNS 模型	27
图 2-2 改进的 TNS 模型	29
图 2-3 分布函数方法	31
图 2-4 成对速度的概率分布函数	34
图 2-5 高斯流模型	35
图 2-6 $f\sigma_8$ 的测量	40
图 3-1 $z = 0$ 时的功率谱 $\Delta_\alpha^2 \equiv k^3 P_\alpha(k)/2\pi^2$	48
图 3-2 $S_\alpha(k)(\alpha = 1, 2, \dots)$	49
图 3-3 费舍矩阵及其逆矩阵	50
图 3-4 $b_v(A1)$	52
图 3-5 $b_v(A2)$	53
图 3-6 $b_v(A3)$	54
图 3-7 b_v 对暗晕质量的依赖	55
图 3-8 b_v 拟合公式	57
图 3-9 速度偏袒对不同红移巡天的影响	58
图 3-10 $1 - \sigma_{v_h}^2 / \sigma_v^2 = r^2$ 的比较	63
图 3-11 R_v^2 的比较	64
图 4-1 成对速度矩母函数的测量 ($z = 0$)	77
图 4-2 成对速度矩母函数的测量 ($z = 1$)	78
图 4-3 矩展开/累积量展开系数比	79
图 4-4 矩展开/累积量展开对直接测量值的误差	80

图 4-5	不同 $k_{\parallel}$ 时累积量展开对测量值的误差	81
图 4-6	不同质量暗晕累积量展开的误差	82
图 4-7	对红移畸变模型的影响	83
图 4-8	高斯/指数分布近似下的矩母函数	84
图 4-9	本动速度的分解	85
图 4-10	速度分解后重构的矩母函数	85
图 4-11	本动速度中随机成分的矩母函数	86
图 5-1	机器学习算法分类	90
图 5-2	红移畸变中的非线性与非定域性	91
图 5-3	条件生成对抗网络结构	92
图 5-4	生成器的网络结构	93
图 5-5	训练样本仅为暗物质时对 CosmicGrowth J6412 的测试结果	97
图 5-6	训练样本仅为暗物质时对 Gadget 数值模拟的测试结果	98
图 5-7	训练样本仅为暗物质时的测试结果	99
图 5-8	训练样本包含暗晕数据时对 J6412 中暗晕样本的测试结果	100
图 5-9	训练样本包含暗物质时的测试结果	101

表格索引

表 1-1	电磁辐射波段的划分.....	7
表 1-2	Planck 2018 Λ CDM 宇宙学参数	10
表 1-3	常见宇宙学探针	14
表 1-4	CosmicGrowth 宇宙学参数	19
表 1-5	CosmicGrowth 模拟参数	19
表 2-1	红移畸变的理论模型.....	37
表 2-2	红移畸变的观测结果.....	41
表 3-1	J6620 中五组不同质量暗晕的相关参数	47
表 3-2	测得的速度偏袒 b_v	56
表 4-1	J6610 中三组不同质量暗晕的相关参数	74
表 5-1	CosmicGrowth 中三组不同质量的暗晕	95
表 5-2	Gadget 数值模拟参数	95
表 5-3	生成样本统计	97

符号对照表

a	尺度因子
c	光速
c_s	声速
τ	共形时间
H	哈勃参数
H_0	$a = 0$ 时的哈勃常数
$\mathcal{H}$	共形哈勃参数, $\mathcal{H} = aH$
h	无量纲哈勃参数, $H = 100h$ km/s/Mpc
f	结构增长率
G_N	牛顿引力常数
$G_{\mu\nu}$	爱因斯坦张量
G	爱因斯坦标量
$R_{\mu\nu}$	里奇张量
R	里奇标量
$T_{\mu\nu}$	能动张量
w	状态方程
z	宇宙学红移
Λ	宇宙学常数
χ	共动距离
d_L	光度距离
d_A	角直径距离
δ	物质涨落
ξ	关联函数
ρ_R	辐射能量密度
ρ_m	物质能量密度
ρ_b	重子能量密度
ρ_{dm}	暗物质能量密度
ρ_κ	曲率能量密度
ρ_Λ	宇宙学常数能量密度

ρ_c	临界能量密度
Ω_R	以临界能量密度归一化的辐射能量密度
Ω_m	以临界能量密度归一化的物质能量密度
Ω_b	以临界能量密度归一化的重子能量密度
Ω_κ	以临界能量密度归一化的曲率能量密度
Ω_Λ	以临界能量密度归一化的宇宙学常数能量密度

第一章 绪论

上世纪 80 年代以来的宇宙学观测表明了我们所处的宇宙正在加速膨胀^[1-6], 如何解释宇宙加速膨胀成为了现代天文学中的重要课题, 其中, 最有力的手段之一就是宇宙大尺度结构的观测及研究。本章将简要介绍标准宇宙学模型、若干替代模型、以及辨别这些模型的宇宙学探针。

1.1 宇宙学模型

1.1.1 标准宇宙学模型

宇宙学基本原理指出: 宇宙在大尺度上均匀且各向同性^①。满足宇宙学基本原理的度规为弗里德曼-勒梅特-罗伯逊-沃尔克 (Friedmann – Lemaître – Robertson – Walker, FLRW) 度规^②:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (1-1)$$

其中, $a(t)$ 为尺度因子。规定 $a_0 \equiv a(t_0) = 1$, t_0 为现在时刻。 κ 为时空曲率, $\kappa < 0$ 为开放宇宙, $\kappa = 0$ 为平直开放宇宙, $\kappa > 0$ 为闭合宇宙。

求解爱因斯坦场方程

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1-2)$$

可以得到弗里德曼方程组

$$H^2 + \frac{\kappa}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i, \quad (1-3)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \sum_i (\rho_i + 3p_i). \quad (1-4)$$

其中, $H \equiv \dot{a}/a$ 为哈勃参数, 描述宇宙的膨胀速率。 $T^\mu_\nu = \text{diag}(-\rho, p, p, p)$ 为能量动量张量。 $\rho = \sum_i \rho_i$, $p = \sum_i p_i$, ρ_i 与 p_i 分别为宇宙中不同组分的能量密度与压力。定义临界密度

$$\rho_c(a) \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (1-5)$$

① 需要指出, 宇宙学原理是基于观测结果的推断, 而非真正意义上的原理。

② 如无特殊说明, 本文采用自然单位制, 光速 $c = 1$ 。

那么每个组分的无量纲能量密度可以写为 $\Omega_i(a) \equiv \rho_i/\rho_c$ 。设总能量密度 $\Omega(a) \equiv \sum_i \Omega_i(a)$ ，则根据弗里德曼方程的限制，

$$1 = \sum_i \Omega_i(a) + \Omega_\kappa(a) \equiv \Omega(a) + \Omega_\kappa(a) . \quad (1-6)$$

其中, $\Omega_\kappa(a) \equiv -\kappa/(a^2 H^2)$ 。各组分的演化由初始条件及对应的状态方程 $w_i \equiv p_i/\rho_i$ 决定。初始条件一般设置为现在时刻。称 $H_0 \equiv H(a=1)$ 为哈勃常数，通常使用其参数化形式 $H_0 = 100h(\text{km/s/Mpc})$ ， h 为无量纲哈勃参数。另外，通常还把 $a=1$ 时的各组分无量纲能量密度 $\Omega_i(a=1)$ 简记为 Ω_i 。

由能动张量守恒可得

$$\rho(a) = \rho(a_0) \exp \left[\int_{a_0}^a 3(1+w(a)) \frac{da}{a} \right] . \quad (1-7)$$

对于非相对论性粒子, $w=0$, $\rho \propto a^{-3}$; 对于光子和其他相对论性粒子, $w=1/3$, $\rho \propto a^{-4}$; 对于时空曲率 κ , $w=-1/3$, $\rho \propto a^{-2}$;

1.1.1.1 宇宙的加速膨胀

公式1-4描述宇宙膨胀的加速度，可根据状态方程进一步写为

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \sum_i \rho_i (1+3w_i) . \quad (1-8)$$

由于时空曲率项的状态方程 $w=-1/3$ ，因此曲率对加速度没有影响。对于物质, $\rho+3p \simeq \rho > 0$ ，因此物质产生的加速度 < 0 ，导致减速。而多种宇宙学观测表明，宇宙正在加速膨胀^[1-6]，因此宇宙中必然存在 $\rho+3p < 0$ （即 $w < -1/3$ ）的成分，我们将这部分成分叫做暗能量。

目前最通行的暗能量候选体是宇宙学常数 Λ ，其能量密度为 $\rho_\Lambda = -3\Lambda/(8\pi G)$ 。由于 Λ 不随时间变化，因此其状态方程 $w_\Lambda = -1$ ，即 $\Lambda \propto a^0 = \text{const.}$ 。宇宙学常数并非唯一选项，可能的替代理论还有标量场理论 quintessence ($w > -1$)，幻影理论 phantom ($w < -1$)，quintom 理论 (w 可以跨过 -1) 等（参见 §1.1.2）。

对于一个包含物质、辐射、曲率及宇宙学常数项的宇宙，弗里德曼方程可以重新整理为

$$\frac{H^2(a)}{H_0^2} = \Omega_m a^{-3} + \Omega_R a^{-4} + \Omega_\kappa a^{-2} + \Omega_\Lambda . \quad (1-9)$$

这里的 Ω_i 均为 $a=1$ 时的无量纲常数。宇宙微波背景辐射 (Cosmic Microwave Background, CMB) 等观测^[4,6-7]显示：(1) $\Omega_m \simeq 0.32$ 。物质中大部分是不能用标准

粒子模型描述的冷暗物质 (CDM)。这些物质不发生电磁相互作用，因此不辐射/吸收光子，又由于其运动速度远低于光速，因此温度较低，固被称作冷暗物质。物质中的标准模型粒子今天在宇宙中的占比约为 $\Omega_b \simeq 0.05$ 。(2) $\Omega_\Lambda \simeq 0.68$ 。宇宙学常数在今天为主导成分，是晚期宇宙的加速膨胀驱动力。但宇宙学常数并非唯一选择，诸如修改引力等理论也可以提供晚期宇宙加速膨胀的机制。(3) $\Omega_k \simeq 0$ ，即我们的宇宙是平直的。(4) $\Omega_R \simeq 10^{-4}$ 。辐射曾经是宇宙的主导成分，但随着宇宙膨胀逐渐衰减，现在几乎可以被忽略。上述主要由 Λ 与 CDM 主导的宇宙通常被称为标准宇宙学模型，记为 Λ CDM 模型。

1.1.1.2 宇宙的演化历史

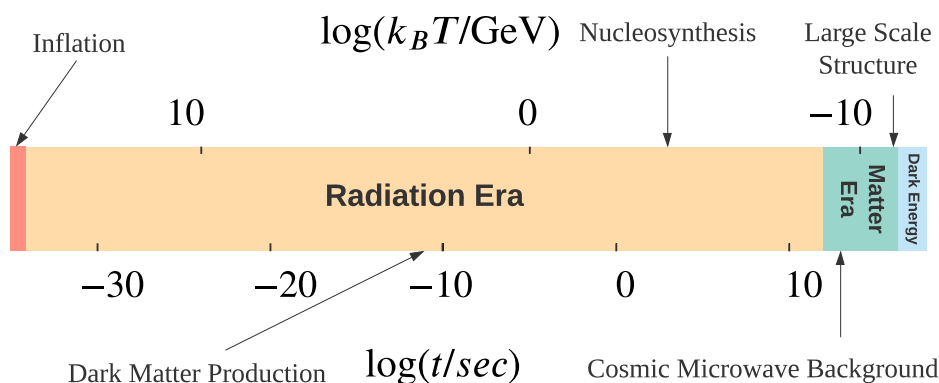


图 1-1 宇宙的演化历史^[8]。上下标度分别代表宇宙的温度与年龄。

Figure 1-1 A history of the Universe^[8]. Any epoch can be associated with either temperature or time.

图1-1展示了目前广泛认可的宇宙演化历史。现代宇宙学认为宇宙诞生于约 138 亿年前的一场大爆炸 (Big Bang)。大爆炸发生后，引力率先解耦，与大统一理论 (Grand Unification Theory, GUT)^[9]共同决定宇宙极早期的演化。在 10^{-35} s，温度下降到 10^{27} K 时，宇宙进入暴涨^①时期 (Inflation)^[11-12]。这个阶段宇宙的体积在 $10^{-36} \sim 10^{-34}$ s 内极速膨胀了 e^{65} 倍，GUT 解耦成为强相互作用与弱电相互作用

暴涨结束后，在 10^{-33} s，宇宙进入辐射主导时期，暗物质可能产生于这一时期^[13-17]。当温度下降至 10^{15} K ≈ 100 GeV 时，电磁相互作用与弱相互作用解耦合，当今宇宙中的四种基本相互作用全部产生。随后温度继续下降。在 10^{-6} s，温度约

① 暴涨理论试图解释大爆炸初条件中存在的若干问题，如视界问题，平坦问题，反物质消失的问题，原初扰动的起源问题，以及宇宙膨胀的起源问题等，参见 Dodelson [8] §6.3 与 Peacock [10] §11。

10^{13}K 时, 夸克冻结形成强子。在 10^{-2}s , 温度约 10^{11}K 时, 质子与中子退耦合变为自由粒子。在约 1s 时, 温度下降至 10^{10}K , 中微子从物质与辐射中退耦合^①。同时自由中子变得不再稳定, 衰变成为质子, 电子与中微子, 数量减小到质子的 $1/5$ 。在约 3 分钟时, 温度下降至 $5 \times 10^9\text{K}$, 轻元素核合成 (Nucleosynthesis) 开始。这一过程主要产生了 ^1H (约 75%) 与 ^4He (约 25%), 以及极少量的 ^2H , ^3He , ^7Li 与 ^7Be 等元素^②。这一时期的所有粒子都处于高温高密的等离子态, 光子被束缚在等离子流体内, 无法自由传播。

进入物质主导的时期后, 当宇宙温度进一步下降至 $\sim 3000\text{K}$ 时, 自由电子与原子核结合形成电中性原子。辐射从物质中退耦合, 自由光子产生。这是我们可以观测到的最早的电磁信号。此时是大爆炸发生后的约 38 万年, 这一时期被称为复合 (Recombination) 时期, 自由光子在产生时所处的时空曲面被称为最后散射面 (Last Scattering Surface, LSS)。从复合时期到第一代恒星形成, H 与 He 均以电中性形态存在。除中性氢的 21cm 辐射外^[21-22], 宇宙中几乎没有新的可见光或红外辐射产生。这一时期被称为宇宙的黑暗时期 (Dark Age)。在大爆炸发生后的约 4-5 亿年, 宇宙温度下降至 $\sim 30\text{K}$, 原初扰动在引力作用下逐渐形成结构, 并在其中孕育出了第一代星系与恒星, 宇宙再次被点亮。伴随着超新星的爆发, 金属元素产生, 行星、恒星、星系等结构大量形成。期间, 恒星形成时产生的高能光子导致中性氢再次被电离, 产生自由电子与氢原子核, 这一时期被称为再电离时期 (Epoch of Reionization, EoR)^[23]。最后散射面发出的光子与这些自由电子发生逆康普顿散射, 并在今天看到的宇宙微波背景辐射中留下痕迹。

现在的宇宙距大爆炸约 138 亿年, 正处于低物质密度、低辐射密度 (温度约为 2.725K), 由暗能量主导的时期。在暗能量的作用下, 宇宙将继续加速膨胀。

1.1.1.3 标准宇宙学存在的问题

标准宇宙学模型在解释上述各阶段的宇宙学观测数据时取得了巨大成功, 但也存在许多问题, 其中最直接的一个就是宇宙学常数问题^[24]。观测上利用 ΛCDM 模型得到的暗能量密度为 $\rho_{\Lambda}^{\text{obs}} \sim 10^{-47}\text{GeV}^4$, 而基于粒子物理理论计算得到的期望值为 $\rho_{\Lambda}^{\text{exp}} \sim 10^{72}\text{GeV}^4$, 前者比后者小了 ~ 120 个数量级, 二者巨大的差异难以调和。与宇宙学常数问题相关的另一个问题是巧合问题^[25]。如前所述, 物质的能量密度 ρ_{m} 随着宇宙的膨胀不断下降。在经历了 138 亿年的演化后, 今天观测到的

① 由于中微子几乎不与其他物质发生相互作用, 因此理论上在今天依然可以被观测到, 产生中微子背景辐射 (Cosmic Neutrino Background, CνB)^[18-20]。

② 该时期无法产生 8 个以上核子组成的稳定元素, 这些更重的元素要在宇宙演化的晚期通过超新星 (Supernovae) 爆发才能形成。

ρ_Λ 与 ρ_m 大小相当。这意味着二者的比例在 138 亿年前的早期宇宙中必须是一个极小的特定值，增大或减小该数值都将改变宇宙的演化历史。这一巧合令人难以理解。为了解决这些问题，一方面需要尽量降低观测结果的系统误差，另一方面，人们也在寻求标准宇宙学模型之外的替代理论。

1.1.2 非标准宇宙学模型

1.1.2.1 标准宇宙学的简单唯象推广

在 Λ CDM 模型描述的宇宙中，暗能量状态方程为定值 $w = -1$ ，这带来的一个直接问题就是上文中提到的宇宙学常数问题。一个对 Λ CDM 模型的简单推广是将 w 看作任意常数，称为 w CDM 模型。 w 也可以随时间演化，例如取 $w = w_0 + w_a(1 - a)$ ，称为 w_0w_a CDM 模型，其中， w_0 为 t_0 时的暗能量状态方程， $w_a = -\partial w / \partial a$ ， a 为尺度因子。广义上 w 可以取任何形式。

1.1.2.2 其他模型

Modified gravity roadmap

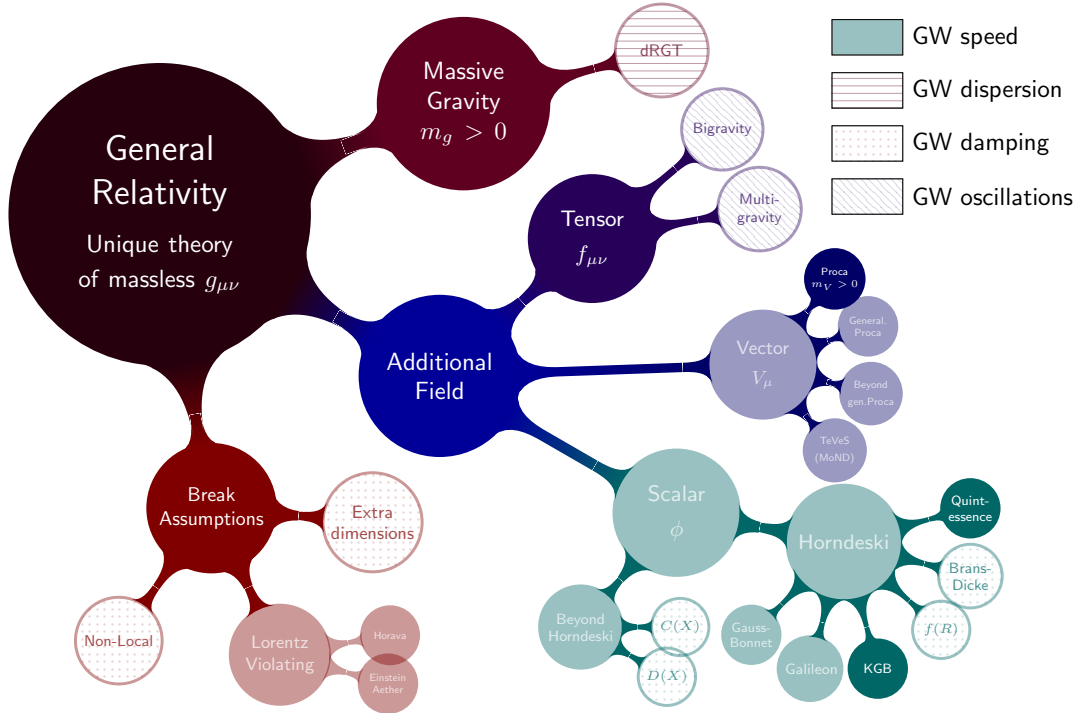


图 1-2 修改引力理论^[26]。

Figure 1-2 Modified Gravity Theories^[26].

爱因斯坦场方程 (公式1-2) 决定了宇宙演化的动力学。通过修改场方程左右两侧 $G_{\mu\nu}$ 及 $T_{\mu\nu}$ ，可以得到不同的宇宙学模型。通过修改等式左侧 $G_{\mu\nu}$ ，可以得到一系列修改引力模型。而在等式右侧 $T_{\mu\nu}$ 中加入提供负压的成分，可以得到一系列暗能量模型。例如标准宇宙学模型为了得到加速膨胀的宇宙学解，在 $T_{\mu\nu}$ 中加入了宇宙学常数项 Λ 。

图1-2展示了修改引力的分支结构。对广义相对论的修改通常有三大类：

1. 打破原有广义相对论假设。如引入更高维度，DGP 模型、弦论可以归结为这类。
2. 引入附加场。附加场可以是标量场，如 $f(R)$ 、 $f(\tau)$ ^[27]；也可以是矢量场，如 TeVeS/MOND；亦或是张量场。
3. 引入带质量的引力子。如 dRGT 模型。

除此之外，还可以构建各种耦合模型，如曲率与物质场耦合模型 $f(R, T)$ ^[28-29]。也有建立在宇宙学基本原理之外的模型，如 LTB 模型，认为宇宙各向同性但径向非均匀。另外，利用有效场理论 (Effective Field Theory, EFT) 还可以同时描述上述多种模型^[30]。附录 A 中介绍了若干暗能量及修改引力模型。现代宇宙学的一个重要课题就是通过宇宙学观测区分上述众多的不同模型，从而正确理解宇宙的演化。

1.2 宇宙学观测

目前人类对宇宙的探测手段主要有四种：

1. 天体的电磁辐射。目前，宇宙学观测仍主要依赖于天体的电磁辐射。电磁辐射按照波段划分为不同类型，见表1-1。受限于大气吸收的影响，地面望远镜主要针对可见光 (光学, Optical) 波段以及射电 (Radio) 波段进行观测。
2. 引力波。2015 年，LIGO 实验组观测到了第一个引力波事件^[31]，从此打开了一个探测宇宙的新窗口。引力波事件在宇宙中十分普遍，随着探测技术的进步，未来在宇宙学中的应用会更加重要；
3. 宇宙线。宇宙线是宇宙中的高能亚原子粒子，在宇宙学中的应用有限；
4. 中微子。由于中微子散射截面极小，因此中微子探测极为困难^①；

显然，§1.1 中介绍的各种宇宙学参数都是不可直接观测的量，如何建立理论与可观测测量之间的联系是观测宇宙学的重要任务。

① 对中微子背景辐射的探测可以参考 Ringwald [19], Betts et al. [20]。

γ ray	X ray	UV (Ultraviolet)	Optical	IR (Infrared)	Radio
$< 0.1\text{nm}$	$0.1 \sim 10\text{nm}$	$10 \sim 400\text{nm}$	$400 \sim 700\text{nm}$	$700\text{nm} \sim 1\text{mm}$	$> 1\text{mm}$

表 1-1 电磁辐射波段的划分。

Table 1-1 Electromagnetic radiation classes.

1.2.1 宇宙学距离，本动速度与红移

定义天体距离观测者的共动距离 (comoving distance)

$$\chi(a) \equiv \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = \int_a^{a_0} \frac{da'}{a'^2 H(a')} . \quad (1-10)$$

共动距离不随宇宙的膨胀发生改变。共动距离并不是可观测量，实际的可观测量是光度距离与角直径距离。我们把光度 L 已知的天体称为标准烛光，定义光度距离 (luminosity distance) 为

$$d_L \equiv \left(\frac{L}{4\pi F} \right)^{1/2} = \begin{cases} \sinh(\sqrt{\Omega_k} H_0 \chi) / (H_0 \sqrt{\Omega_k}) / a & , \Omega_k > 0 \\ \chi / a & , \Omega_k = 0 \\ \sin(\sqrt{-\Omega_k} H_0 \chi) / (H_0 \sqrt{-\Omega_k}) / a & , \Omega_k < 0 \end{cases} . \quad (1-11)$$

其中, F 为测得的光通量。对于展源, 若其特征尺度为 l , 还可以测量其角直径距离 (angular diameter distance)

$$d_A \equiv \frac{l}{\theta} = \begin{cases} a \sinh(\sqrt{\Omega_k} H_0 \chi) / (H_0 \sqrt{\Omega_k}) & , \Omega_k > 0 \\ a \chi & , \Omega_k = 0 \\ a \sin(\sqrt{-\Omega_k} H_0 \chi) / (H_0 \sqrt{-\Omega_k}) & , \Omega_k < 0 \end{cases} . \quad (1-12)$$

其中, θ 为 l 的张角, 是一个小量。光度距离及角直径距离与时空曲率 Ω_k 有关。

定义红移 z 为

$$1 + z \equiv \lambda_{\text{obs}} / \lambda_0 = a(t_0) / a(t) , \quad (1-13)$$

其中, λ_{obs} 为观测到的光子波长, λ_0 为静止参考系下, 即天体辐射光子时, 光子波长。

在引力作用下, 星系会产生本动速度 (peculiar velocity) v_{pec} 。本动速度会产生额外的多普勒红移 $z_{\text{pec}} = v_{\text{pec}} / c$, 使得实际测得的红移为

$$1 + z_{\text{obs}} = (1 + z_{\text{pec}})(1 + z_{\text{cos}}) . \quad (1-14)$$

其中, z_{cos} 为宇宙学红移。

1.2.2 宇宙学探针

利用观测数据区分不同宇宙学模型，确定宇宙学参数，需要借助各种宇宙学探针。本节将介绍若干常用的宇宙学探针。

1.2.2.1 宇宙微波背景辐射

复合时期 ($z \sim 1100$) 光子退耦合变为自由光子, 之后被我们观测到, 产生 CMB 图像。因此, 借助 CMB, 我们可以了解早期宇宙的信息。

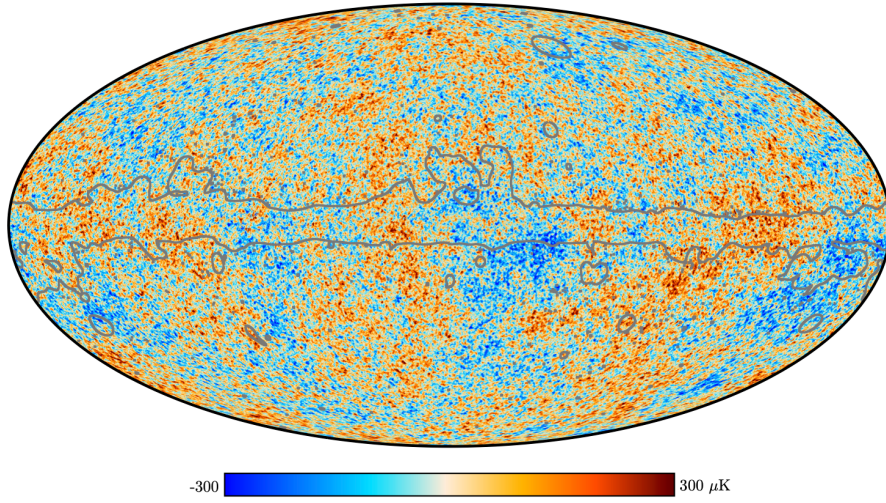


图 1-3 Planck 2018 宇宙微波背景辐射温度图^[6]。

Figure 1-3 Planck 2018 CMB Temperature Map^[6].

Alpher et al. [32]首先在理论上预言了宇宙微波背景辐射 (CMB) 的存在。直到 1965 年, Penzias 与 Wilson 在一次观测中意外发现了 CMB^[33-34]。目前最精确的 CMB 观测来自普朗克 (Planck) 卫星。图1-3展示了普朗克 2018 年最新的观测结果^[6]。CMB 的平均温度 $T \sim 2.725\text{K}$, 温度涨落仅为 $\sim 10^{-5}$, 这证明宇宙在大尺度上各向同性。而小尺度上的各向异性主要来自于原初密度扰动, 正是原初扰动促使结构在晚期形成。统计上刻画小尺度上的各向异性可以利用 CMB 图像的角功率谱。将温度涨落展开为球谐函数

$$\frac{\Delta T}{T} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \psi), \quad (1-15)$$

其中, ℓ 与 m 为整数, $a_{\ell m}$ 为展开系数, θ 与 ψ 为方位角。角功率谱的定义为

$$C_{\ell} = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_m |a_{\ell m}|^2. \quad (1-16)$$

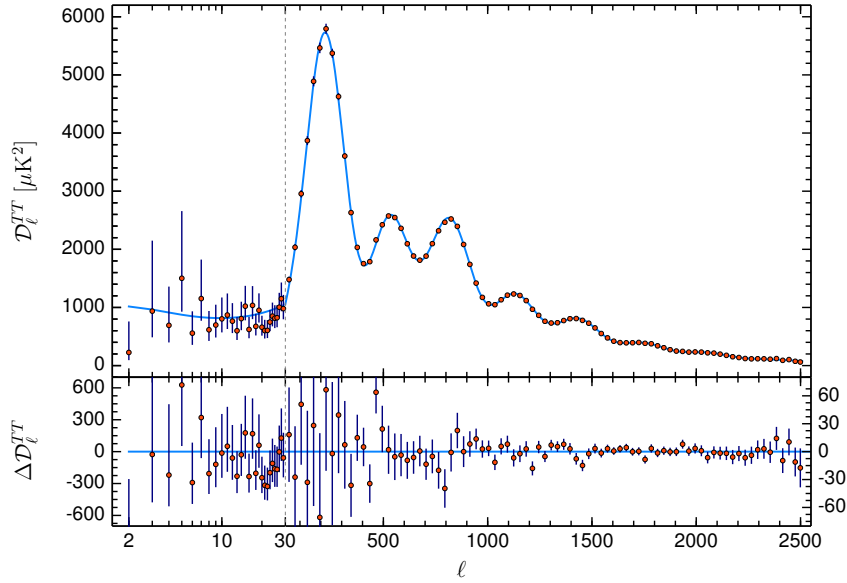


图 1-4 Planck 2018 CMB 温度的角功率谱^[35], 图中 $D_\ell = \ell(\ell + 1)C_\ell/2\pi$ 。数据点为观测结果, 蓝色实线为 Λ CDM 最佳拟合结果。下侧为二者残差。

Figure 1-4 Planck 2018 CMB temperature angular power spectrum^[35]. Here, $D_\ell = \ell(\ell + 1)C_\ell/2\pi$. Data points are measured from the Planck observation. The blue curve is the best-fit Λ CDM theoretical spectrum. The lower panel is the residual error.

CMB 角功率谱的形状主要由以下几个效应决定: (1) 功率谱中的振荡来自于下文 (§1.2.2.2) 将要介绍的重子声波振荡 (Baryon Acoustic Oscillation, BAO); (2) 描述光子受最后散射面上引力势影响的 SW 效应; (3) 光子在最后散射面上的多普勒效应; (4) 随着光子退耦, 光子自由程逐渐增大, 导致小尺度上的扰动被抹平的 Silk Damping; (5) 描述光子在传播路径上受引力势影响的 ISW 效应^[36-37]; (6) CMB 光子与再电离后的电子发生逆康普顿散射产生的 SZ 效应^[38]等。其中, (5, 6) 为二阶 (secondary anisotropies) 效应。图1-4展示了 Planck 2018 测得的 CMB 角功率谱。当 $\ell < 30$ 时误差棒显著增大, 这是由于实际观测中, 我们只能观测到一个宇宙所引起的 cosmic variance。图中的实线为 Λ CDM 模型的最佳拟合结果。表1-2列出了 Planck 2018 在 Λ CDM 模型假设下得到的 6 个独立宇宙学参数, 分别为重子密度 $\Omega_b h^2$, 暗物质密度 $\Omega_c h^2$, 复合时期声视界 (参见 §1.2.2.2) 张角 $100\theta_{MC}$, 再电离光深 τ , 原初扰动振幅 A_s , 以及标量谱指数 n_s ^①。

① 关于六个宇宙学参数可参考 Planck Collaboration et al. [6]

$\Omega_b h^2$	$\Omega_c h^2$	$100\theta_{MC}$	τ	$\ln(10^{10} A_s)$	n_s
0.02233	0.1198	1.04089	0.0540	3.043	0.9652
± 0.00015	± 0.0012	± 0.00031	± 0.0074	± 0.014	± 0.0042

表 1-2 Planck 2018 Λ CDM 宇宙学参数限制^[6]。常用的导出参数有 $\Omega_m = 0.3147 \pm 0.0074$, $H_0 = 67.37 \pm 0.54 \text{ km/s/Mpc}$, $\sigma_8 = 0.8101 \pm 0.0061$ 。

Table 1-2 Planck 2018 Λ CDM cosmological parameters^[6]. Some derived parameters are $\Omega_m = 0.3147 \pm 0.0074$, $H_0 = 67.37 \pm 0.54 \text{ km/s/Mpc}$, $\sigma_8 = 0.8101 \pm 0.0061$.

1.2.2.2 重子声波振荡

复合发生以前, 物质与光子处于高温高压的耦合态。在原初扰动作用下, 高密度区域物质趋于聚合。当聚合到一定程度时, 由于光压的作用, 重子物质开始向外扩散。随着扩散光压减弱, 在引力作用下重子再次趋于聚合, 如此反复, 产生了一个由高密度区域向外传播的振荡波。类比于声波, 我们将这种效应称之为重子声波振荡 (Baryon Acoustic Oscillation, BAO)。振荡传播的速度称为声速 c_s , 由重子与光子的能量密度比 ρ_b/ρ_γ 决定:

$$c_s(z) = \frac{c}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (1-17)$$

复合发生后, 光子退耦合。由于损失了光压, 重子扰动被固定在了一个以初始扰动位置为中心的球壳上。球壳的半径为此时声波传播的距离, 称为声视界:

$$r_s = \int_0^{t_*} \frac{c_s(t)}{a(t)} dt = \int_{z_*}^{\infty} \frac{c_s(z)}{H(z)} dz \quad (1-18)$$

其中, 下标 $*$ 代表该量为复合时期的量。声视界在共动坐标下保持不变, 目前测得的值约为 $r_s \approx 147 \text{ Mpc}$ ^[35]。

1960 年代晚期, 在 CMB 中最早预言了重子声波振荡的存在。2000 年, de Bernardis et al. [39] 利用回力镖气球实验 (BOOMERanG), 第一次在 CMB 功率谱中探测到了 BAO 峰。光子退耦后, 重子声波振荡的遗迹会保留至今, 因此 BAO 也会体现在大尺度结构中。

描述大尺度结构常用的两个统计量是关联函数和功率谱。定义星系的密度扰动场

$$\delta_g = \frac{n_g - \bar{n}_g}{\bar{n}_g}. \quad (1-19)$$

其中, n_g 为星系数密度。星系的两点关联函数定义为

$$\xi_g(\mathbf{r}) = \langle \delta_g(\mathbf{x}) \delta_g(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{r}}. \quad (1-20)$$

其中, $\langle \cdots \rangle_{\mathbf{r}}$ 表示对所有间隔为 $\mathbf{r}$ 的星系对求平均。两点关联函数反映了在空间中任意间隔为 $\mathbf{r}$ 的两点上找到一对星系的概率与假设星系随机分布时在同样间隔找到一对星系的概率之差。因此, 关联函数直接反映了星系在位形空间中的成团性。星系功率谱 $P_g(\mathbf{k})$ 的定义为

$$\langle \delta_g(\mathbf{k}) \delta_g(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta_{3D}(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_g(\mathbf{k}) . \quad (1-21)$$

功率谱与关联函数可以通过傅立叶变换相互转换。功率谱也反映了星系在不同尺度上的成团性。如果宇宙学原理成立, 那么关联函数与功率谱也应当各向同性, 但是, 由于星系本动速度的影响, 实际观测中存在导致各向异性的红移畸变效应 (参见 §1.2.2.3)。

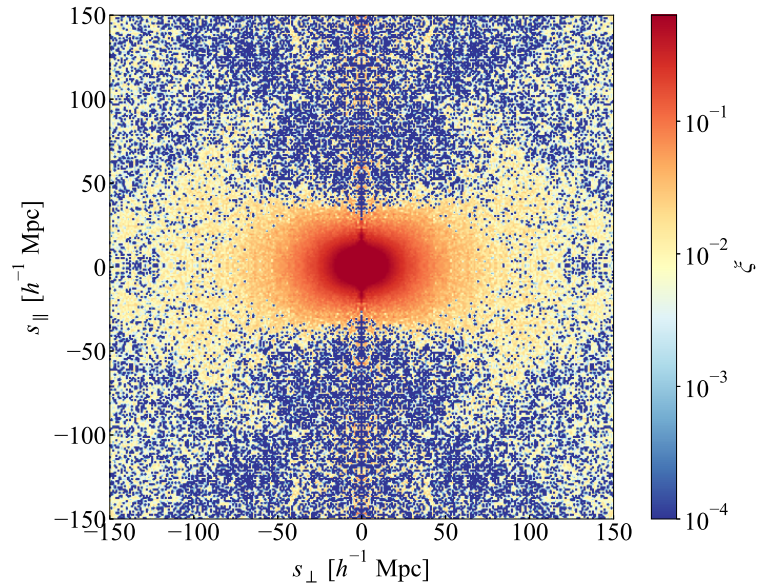


图 1-5 我们利用 BOSS CMASS 星系样本算得的红移空间中二维关联函数 $\xi(s_{\perp}, s_{\parallel})$ 。

Figure 1-5 2 dimensional 2-point correlation function in redshift space $\xi(s_{\perp}, s_{\parallel})$ for BOSS CMASS Galaxies.

图1-5为我们利用观测数据计算得到的星系二维关联函数, 横纵坐标分别对应垂直视线方向及平行视线方向, s 表示红移空间中的坐标。可以明显的看到, 在 $\sim 100 \text{Mpc}/h$, 由于 BAO 的影响, 关联函数增强; 同时, 由于红移畸变的影响, 关联函数并非各向同性, 而是沿视线方向产生了畸变。

实际应用中, 通常不会使用 $(s_{\perp}, s_{\parallel})$ 的投影方式, 而是计算 $\xi(s, \mu)$, 其中, μ 为 $\mathbf{s}$ 与视线方向夹角的余弦。直接拟合 $\xi(s, \mu)$ 比较困难, 因此还会利用勒让德多

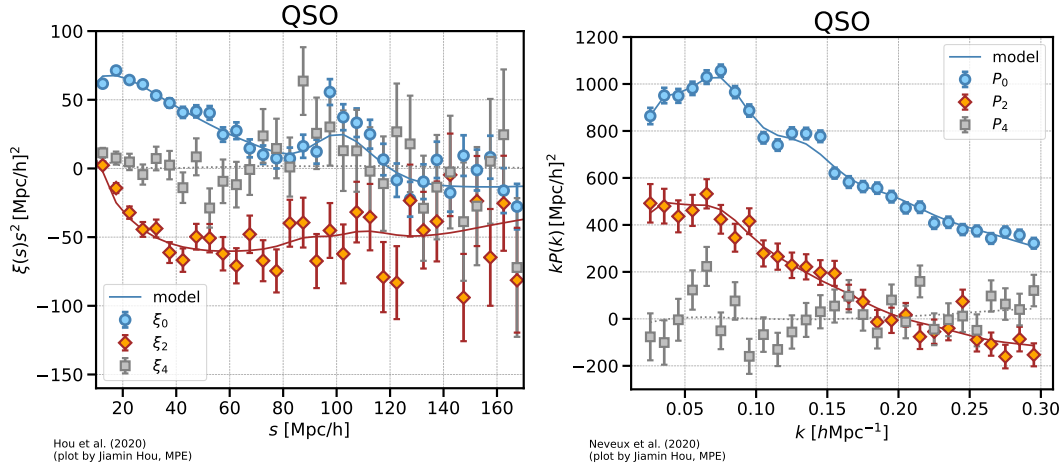


图 1-6 利用 eBOSS 类星体样本测得的关联函数（左）及功率谱（右）的单极矩（蓝）、四极矩（红）、及十六极矩（灰）^[40-41]。实线为模型的最佳拟合值。

Figure 1-6 Monopole (blue), quadrupole (red) and hexadecapole (grey) of correlation function (left) and power spectrum (right) measured for eBOSS quasar samples^[40-41].

项式的正交性，进一步计算关联函数的多极矩 (multipoles)

$$\xi_\ell(s) \equiv \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^1 \xi(\mu, s) \mathcal{P}_\ell(\mu) d\mu, \quad (1-22)$$

其中, $\mathcal{P}_\ell$ 为 ℓ 阶勒让德多项式。由于对称性, 关联函数只存在偶极矩 $\ell = 0, 2, 4 \dots$ 。同理, 也可以计算功率谱的多极矩 $P_\ell(k)$ 。图 1-6 为利用 eBOSS Quasar 观测数据测得的关联函数及功率谱的多极矩。由于暗物质背景的作用, 相比 CMB, BAO 的信号在大尺度结构中被严重削弱。在功率谱中, BAO 造成的扰动约为 $\sim 10\%$ 。在关联函数中, $s \sim 100 \text{Mpc}/h$ 处对应的峰为 BAO 峰。

在计算距离时, 需要设定基准 (fiducial) 宇宙学, 这会同时给定基准声视界的大小。定义参数 α 为测定的 BAO 尺度与基准宇宙学给出的尺度之比。对于各向异性的关联函数, 分别定义垂直/平行视线方向的两个参数

$$\alpha_\perp = \frac{D_M(z)/r_s}{D_M^{\text{fid}}(z)/r_s^{\text{fid}}}, \quad \alpha_\parallel = \frac{D_H(z)/r_s}{D_H^{\text{fid}}(z)/r_s^{\text{fid}}}. \quad (1-23)$$

其中, D_M 为共动角直径距离, $D_H = c/H$ 为哈勃距离, 上标 fid 代表基准宇宙学。 $\alpha_\parallel, \alpha_\perp$ 被称为 AP 参数^[42]。在限制宇宙学时, 需要将所有由基准宇宙学计算得到的距离转换为带 AP 参数的距离, 如 $\xi(s_\perp, s_\parallel) \rightarrow \xi(\alpha_\perp s_\perp, \alpha_\parallel s_\parallel)$ 。BAO 被称为“标准尺”, 通过测量哈勃距离 D_H 及角直径距离 D_M 来限制宇宙学。图 1-7 展示了不同观测数据中, BAO 对哈勃距离 D_H 及角直径距离 D_M 的测量。其中, 实线为 Planck 2018 ΛCDM 模型参数的预测结果。

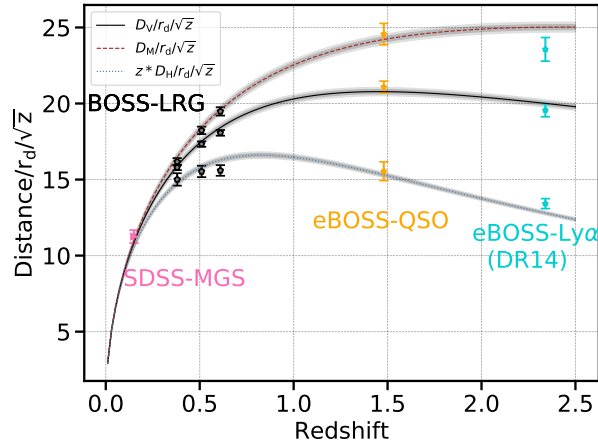


图 1-7 利用 BAO 对不同红移处样本测得的角直径距离及哈勃距离^[40]。曲线为 Planck 2018 Λ CDM 模型的预测结果。

Figure 1-7 Angular diameter distance and Hubble distance measured with BAO from different samples at different redshifts^[40]. The curves are the predictions of Planck 2018 Λ CDM model.

1.2.2.3 红移畸变

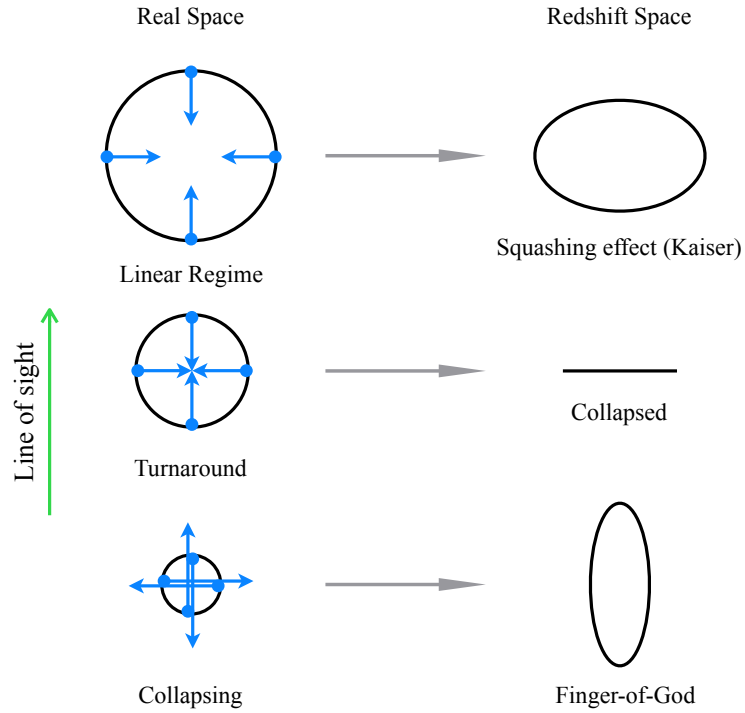


图 1-8 红移畸变示意图^[43]。

Figure 1-8 Illustration of redshift space distortion^[43].

如 §1.2.1 所述，本动速度会在宇宙学红移上叠加额外的多普勒红移，因此在实际观测中，星系的观测位置会由于本动速度的作用而偏离其真实位置。红移空间中的位置 $\mathbf{s}$ 与真实空间中的位置 $\mathbf{x}$ 存在以下关系：

$$\mathbf{s} = \mathbf{x} + \frac{v_{\parallel}}{aH(z)} \hat{x}. \quad (1-24)$$

其中， $v_{\parallel}$ 为本动速度沿视线方向 $\hat{x}$ 的投影。这带来的直接影响是改变了星系各向同性的空间分布，这种效应被称为红移畸变。

图1-8为产生红移畸变的示意图。其中，视线方向由下而上，蓝色箭头代表本动速度的方向。图中自上而下对应的尺度依次减小。在线性尺度，星系有向高密度区域聚合的趋势，因此在红移空间中，星系分布在视线方向上被压缩，导致测得的成团性加强，这种效应被称为 **Kaiser** 效应。随着尺度的减小，星系的随机运动逐渐增强，这使得达到一定非线性尺度时，星系原有的成团性在红移空间中会被打破。这种效应使星系分布在视线方向被拉长，像手指一样指向观测者，所以被称为 **Finger-of-God** 效应。在二维关联函数中 (图 1-5)，可以看到 **Kaiser** 及 **FoG** 对星系分布造成的影响。

Cosmological Probes		Measurements	Main Systematics
CMB	Primordial	$T, P^{[1]}$	Foreground, equipment Calibration
	ISW	$T \rightarrow \dot{\phi}$	Cosmic variance
	tSZ	$T \rightarrow P_{\text{gas}},$	Foreground, baryon physics
	kSZ	$T \rightarrow P_{\dot{v}_e},$	Foreground, baryon physics
	lensing	$T, P \rightarrow \kappa$	Foreground, baryon physics
Lensing	weak	$\gamma, \kappa \rightarrow d_A, D$	Shape, photometry, baryon physics, IA ^[2]
	strong	$\Delta t \rightarrow H$	Shape, photometry, baryon physics
Galaxy Clustering	smooth	$P_g \rightarrow d_A H$	NLinear NLocal bias
	BAO	$P_g \rightarrow d_A, H$	NLinear evolution, NLinear NLocal bias
	RSD	$P_g \rightarrow P_v$	NLinear evolution, NLinear NLocal bias
Ia SN		$m, z \rightarrow d_L$	Standard candle, photometry
Galaxy Cluster		$n(z)$	Mass Calibration
Gravitational Waves	Primordial	CMB B-mode $\rightarrow r$	Sensitivity, foreground, instrument systematics
	Local	$h(t) \rightarrow d_L$	Sensitivity, foreground, instrument systematics

¹ Polarization

² Intrinsic Alignment

表 1-3 常见宇宙学探针。

Table 1-3 Cosmological Probes.

上文主要介绍了三个宇宙学探针。宇宙微波背景辐射与宇宙大尺度结构形成关系密切，给出了宇宙演化的初始条件；而重子声波震荡与红移畸变则直接描述了大尺度结构中的星系成团性。其中，红移畸变在结构增长的研究中十分关键，也是本文研究的重点，会在第二章中详细介绍。

附录 B 简要介绍了引力透镜、Ia 型超新星、以及引力波等，更多的宇宙学探针可参考表 1-3。

1.3 结构增长

物质的原初扰动在引力作用下，经历线性增长及非线性增长两个阶段，逐渐形成今天我们看到的大尺度结构。在线性阶段，我们可以借助扰动理论计算结构增长。当演化进入非线性阶段，扰动理论不再适用，需要借助其他方法如 N 体数值模拟对结构增长进行计算。

1.3.1 扰动理论

为简化方程的表达，下面我们在共动坐标系下讨论问题。定义共形时间 τ 满足 $dt = a(\tau) d\tau$ ，共形哈勃参数 $\mathcal{H} \equiv aH$ ，并用 $\mathbf{x}$ 以及 $\mathbf{v}$ 分别表示粒子的共动坐标，及共动坐标系下的本动速度。则相空间中的物质分布函数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau)$ 满足如下 Vlasov 方程：

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\mathbf{p}}{ma} \cdot \nabla f - ma \nabla \phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (1-25)$$

其中， m 为粒子质量， a 为尺度因子， $\mathbf{p} = am\mathbf{v}$ 为粒子动量。 ϕ 为引力势，满足泊松方程：

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}, \tau) = \frac{3}{2} \Omega_m(\tau) \mathcal{H}^2(\tau) \delta(\mathbf{x}, \tau). \quad (1-26)$$

δ 为密度涨落，

$$\delta(\mathbf{x}, \tau) \equiv \frac{\rho(\mathbf{x}, \tau) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}, \quad (1-27)$$

其取值范围为 $-1 < \delta < \infty$ 。

1.3.1.1 欧拉扰动理论

直接求解 Vlasov 方程非常困难，我们通常更关心粒子空间分布的演化。在欧拉坐标系下，相空间中的物质分布函数对动量求积分（即 0 阶矩），可以得到物质密度分布：

$$\int d^3\mathbf{p} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) \equiv \rho(\mathbf{x}, \tau). \quad (1-28)$$

其 1 阶矩与 2 阶矩分别为

$$\int d^3\mathbf{p} \frac{\mathbf{p}}{am} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) \equiv \rho(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau), \quad (1-29)$$

$$\int d^3\mathbf{p} \frac{p_i p_j}{(am)^2} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) \equiv \rho(\mathbf{x}, \tau) v_i(\mathbf{x}, \tau) v_j(\mathbf{x}, \tau) + \sigma_{ij}(\mathbf{x}, \tau). \quad (1-30)$$

由物质守恒可得连续性方程：

$$\frac{\partial \delta(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} + \nabla \cdot [1 + \delta(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau)] = 0. \quad (1-31)$$

Vlasov 方程 1-25 与连续性方程 1-31 联立可以给出描述动量守恒的欧拉方程：

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} + \mathcal{H}(\tau) \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau) = -\nabla \phi(\mathbf{x}, \tau) - \frac{1}{\rho} \nabla_j (\rho \sigma_{ij}). \quad (1-32)$$

通过求解 1-31 与 1-32 可以得到密度场与速度场的演化方程。在线性近似下

$$\frac{\partial \delta(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} + \theta(\mathbf{x}, \tau) = 0, \quad (1-33)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} + \mathcal{H}(\tau) \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau) = -\nabla \phi(\mathbf{x}, \tau). \quad (1-34)$$

其中， $\theta(\mathbf{x}, \tau) \equiv \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau)$ 为速度场的散度。令 $\delta(\mathbf{x}, \tau) = D(\tau) \delta(\mathbf{x}, 0)$ ，其中， $D(\tau)$ 为线性增长因子。则 $\theta(\mathbf{x}, \tau) = -\mathcal{H} f \delta(\mathbf{x})$ ，其中， $f \equiv d \ln D / d \ln a$ 为线性增长率，描述结构增长的快慢。对于一个由 Ω_m 与 Ω_Λ 主导的宇宙，可以解得， $f \approx \Omega_m^{0.55}(z)$ 。密度场满足方程：^①

$$\ddot{\delta} + \left(\frac{3}{a} + \frac{\dot{H}}{H} \right) \dot{\delta} - \left(\frac{3}{2} \frac{\Omega_0 H_0^2}{H^2 a^3} \right) \left(\frac{\delta}{a^2} \right) = 0. \quad (1-36)$$

1.3.1.2 拉格朗日扰动理论

欧拉方法可以通过微扰逐阶求解非线性扰动。在拉格朗日坐标下，也可以近似求解非线性扰动。假设粒子初始位置为 $\mathbf{q}$ ，在经历时间 τ 后，其最终位置 $\mathbf{x}$ 可以由位移场 Ψ 表示为

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{q} + \Psi(\mathbf{q}, \tau). \quad (1-37)$$

① 修改引力对结构增长的影响可以由以下公式描述^[44]：

$$\ddot{\delta} + \left(\frac{3}{a} + \frac{\dot{H}}{H} \right) \dot{\delta} - \left(\frac{G_{\text{eff}}}{G_N} \right) \left(\frac{3}{2} \frac{\Omega_0 H_0^2}{H^2 a^3} \right) \left(\frac{\delta}{a^2} \right) = 0. \quad (1-35)$$

其中， G_{eff} 为不同引力模型对应的有效引力常数， G_N 为牛顿引力常数。例如，对于 Λ CDM 或平直的 DGP 模型， $G_{\text{eff}} = 1$ ，对于 $f(R)$ ， $G_{\text{eff}} = (1 + f, R)^{-1}$ 。

位移场的运动方程为

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{d\tau^2} + \mathcal{H}(\tau) \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = -\nabla \phi, \quad (1-38)$$

ϕ 为引力势，满足泊松方程1-26。对上式取散度可得

$$J(\mathbf{q}, \tau) \nabla \cdot \left[\frac{d^2 \Psi}{d\tau^2} + \mathcal{H}(\tau) \frac{d\Psi}{d\tau} \right] = \frac{3}{2} \Omega_m \mathcal{H}^2 (J - 1). \quad (1-39)$$

欧拉空间与拉格朗日空间质量守恒，有 $\bar{\rho}(1 + \delta(\mathbf{x})) d^3x = \bar{\rho} d^3q$ 。因此

$$1 + \delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\delta_{ij} + \Psi_{i,j}|} \equiv \frac{1}{J(\mathbf{q}, \tau)}, \quad (1-40)$$

其中， $\Psi_{i,j} \equiv \partial \Psi_i / \partial q_j$ ， J 为欧拉空间转换到拉格朗日空间的雅可比矩阵。位移场可以展开为 $\Psi = \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)} + \Psi^{(3)} + \dots$ 。运动方程1-38在一阶线性近似时的解满足：

$$\nabla_q \cdot \Psi^{(1)} = -D(\tau) \delta(\mathbf{q}). \quad (1-41)$$

其中， D 为线性结构增长因子。此时

$$1 + \delta(\mathbf{x}, \tau) = \frac{1}{[1 - \lambda_1 D(\tau)][1 - \lambda_2 D(\tau)][1 - \lambda_3 D(\tau)]}. \quad (1-42)$$

其中， λ_i , $i = 1, 2, 3$ 为 $\Psi_{i,j}$ 的本征值。该近似也被称为 Zeldovich 近似 (ZA)。

1.3.2 N 体数值模拟与非线性结构形成

1.3.2.1 N 体数值模拟简介

如前所述，当演化进入非线性尺度后，传统的扰动理论以及解析模型已经无法精确描述此时的结构，需要借助数值模拟对结构演化进行计算。通常数值模拟可以分为两大类：**N 体数值模拟与流体动力学 (Hydrodynamical) 数值模拟**。这些模拟在一定体积的三维盒子内模拟结构的形成及演化。流体动力学模拟在星系形成及演化中应用更加广泛，通常有两种类型，一是基于平滑粒子 (**Smoothed-Particle Hydrodynamics, SPH**)^[45-46]，一是基于格点 (**Grid-based**)^[47]。这里主要介绍与宇宙大尺度结构增长更相关的 **N 体数值模拟**。**N 体数值模拟**将物质视为离散分布的无碰撞粒子，每个粒子都携带一定质量，并且具有一定半径，在该半径内质量服从某种平滑分布。模拟过程大致分为以下几步：

1. 设定初始条件。 初始条件一般设定在高红移处。生成初始条件的方法有很多，通常利用给定的根据功率谱，根据 **ZA** 或 **2 阶拉格朗日扰动理论 (2LPT)** 产生对应红移处的位移场，进而生成初始的密度场及速度场。

2. 计算粒子受力。 粒子之间只存在引力，引力为长程力，因此在 N 体系统中，每两个粒子之间都需要计算一次相互作用。对第 i 个粒子，

$$\mathbf{F}_i = - \sum_{j \neq i} G \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}, \quad (1-43)$$

这里假定了粒子具有单位质量。 $\sum_{j \neq i}$ 需要对所有 $j \neq i$ 的粒子进行求和。这种计算方法称为 **PP(Particle-Particle)** 算法。PP 算法的复杂度为 $\mathcal{O}(N^2)$ ，实际运用非常耗时，因此数值上衍生出了多种更快求解作用力的方法。

- **树算法 (Tree)**。Barnes et al. [48] 提出了八叉树算法。首先将盒子 8 等分，若子格子中的粒子数目多于 1 个，那么将子格子继续 8 等分，以此类推，直至每个格子中最多只包含 1 个粒子。从最大格点到最小格点，特征长度依次减半。在计算受力时，从最大格点开始遍历，通过格子的大小及与粒子的距离来控制计算精度。设格子的特征长度为 ℓ ，格子相对某一粒子的距离为 d ，若格子对该粒子的张角 $\theta = \ell/d$ 小于设定的阈值，则将该格子内所有粒子视为一个大质量粒子进行一次计算，否则进入下一层格子。树算法的计算复杂度为 $\mathcal{O}(N \log N)$ ，缺点是需要消耗大量内存。
- **PM(Particle-Mesh)** 算法^[49]。PM 算法将盒子均分为若干个网格，将粒子对格点距离作为权重为邻近格点赋值，得到一个平滑分布的密度场 $\rho(\mathbf{x})$ 。然后计算每个格点的受力 $\mathbf{F}_i = -\nabla \phi_i$ ，其中， ϕ_i 为第 i 个格点所在位置的引力势，可通过求解泊松方程确定 $\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho(\mathbf{x})$ 。在傅立叶空间中，泊松方程变为 $-k^2 \phi(\mathbf{k}) = 4\pi G \rho(\mathbf{k})$ ，格点受力 $\mathbf{F}_i = -i\phi(\mathbf{k})\mathbf{k}$ 。如果盒子的大小远远大于感兴趣的尺度，那么 $\rho(\mathbf{k})$ 可以通过快速傅立叶变换 (FFT) 计算，显著提高计算速度。最后，将格点受力用差值方法返还到粒子上。PM 算法的复杂度接近 $\mathcal{O}(N)$ ，但是格点数目会严重限制计算精度，想提高精度需要消耗大量内存及 CPU。
- **混合算法**。为了在保证精度的同时提高计算速度，人们通常会混合使用上述的各种算法，如 **P³M(Particle-Particle-Particle-Mesh)**。P³M 算法结合了 PP 算法与 PM 算法，在计算较近粒子间的受力时，采取 PP 算法；而在计算较远粒子间受力时，采取 PM 算法。P³M 算法是运用最广泛的方法之一，如下文中将要介绍的 **CosmicGrowth** 数值模拟^[50]。除 P³M 外，还有结合树算法与 PM 算法的 **tree-PM** 算法，如 **Gadget-2**^[51]。

3. 更新每个粒子的位置及速度信息。 得到每个粒子受力后，需要计算下一时刻粒子的位置与速度。为了保证计算收敛，满足能量守恒等条件，通常需要用

到精确到二阶的时间积分器 (integrator), 如 Leapfrog^[49], 速度和位置信息交替更新, 每次移动半个时间步长。

4. 重复 2-3 步至模拟结束。

CosmicGrowth 系列数值模拟 表1-4与1-5列出了本文中用到的 CosmicGrowth 系列数值模拟的基本参数。CosmicGrowth 运行的为 P³M 代码。本文选取了其中两组不同参数的标准宇宙学模拟, Planck 及 WMAP。

Model	Ω_b	Ω_c	Ω_Λ	h	n_s	σ_8
Planck Λ CDM	0.0487	0.2663	0.685	0.673	0.9603	0.829
WMAP Λ CDM	0.0445	0.2235	0.732	0.71	0.968	0.83

表 1-4 CosmicGrowth 系列 Λ CDM 宇宙学数值模拟宇宙学参数^[50]。

Table 1-4 Cosmological model parameters of CosmicGrowth Simulations.

Name	N_p	L	da	η	z_i	N_{step}	$z_{\text{out}, 1}$	N_{snap}	Realizations
Planck_2048_400	2048 ³	400	0.0288	0.007	144	5000	16.87	100	1
Planck_2048_1200	2048 ³	1200	0.06	0.03	72	1200	7.30	24	1
WMAP_2048_400	2048 ³	400	0.0288	0.007	144	5000	16.87	100	1
WMAP_2048_1200	2048 ³	1200	0.06	0.03	72	1200	7.30	24	1
WMAP_3072_600	3072 ³	600	0.0288	0.01	144	5000	16.87	100	3
WMAP_3072_1200	3072 ³	1200	0.0288	0.02	144	5000	16.87	100	1

表 1-5 CosmicGrowth 系列 Λ CDM 宇宙学数值模拟模拟参数^[50]。

Table 1-5 Simulation paramters of CosmicGrowth Simulations.

图1-9展示了 CosmicGrowth 中一个数值模拟在不同红移时的切片。厚度为 20Mpc/ h 。在低红移处的宇宙物质结构形似神经网络, 我们称之为宇宙网 (Cosmic Web)。宇宙网中的低密度区域为 Void; 高密度区域主要由丝状结构的 filament、以及 filament 交汇处的结点 (knots) 组成。在这些高密度区域中会形成暗晕 (halo)、子暗晕等高度非线性结构。

1.3.2.2 暗晕

暗晕是结构演化进入非线性阶段后形成的一类维里化结构。描述暗晕形成最简单的理论是球塌缩模型^[52-54]。在 Einstein-de Sitter 宇宙 ($\Omega_\Lambda = 0$) 中, 球塌缩模型

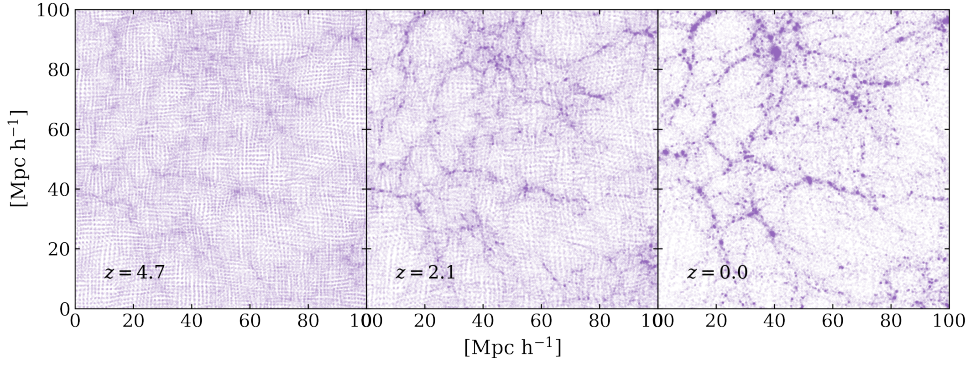


图 1-9 CosmicGrowth N 体数值模拟切片。由左至右红移分别为 $z = 4.7, 2.1, 0$ 。

Figure 1-9 One snapshot from a CosmicGrowth N body simulation. From left to right, the redshifts are $z = 4.7, 2.1, 0$.

给出的暗晕密度为 $\Delta_{\text{vir}} = 18\pi^2 \approx 178$ 倍的背景密度。如果半径 R 内的球形区域在红移 z 时开始塌缩，则线性理论给出 z 时区域内的平均密度为

$$\delta_c(z) = \frac{3(1+z)}{5} \left(\frac{3\pi}{2} \right)^{2/3}. \quad (1-44)$$

红移 $z = 0$ 时， $\delta_c(z = 0) \approx 1.686$ 。一个直接反映结构增长的统计量为暗晕的质量函数，其有多种表述形式，常使用 dn/dM 或 $dn/d \ln M$ ，其中， M 表示暗晕质量， n 表示暗晕个数。显然，暗晕质量函数依赖红移与宇宙学。总的来说，暗晕质量函数可以表示为

$$\frac{dn}{dM} = f(\sigma) \frac{\rho_m}{M} \frac{d \ln \sigma^{-1}}{dM}, \quad (1-45)$$

其中， σ 为包含质量 M 的球体内的方均根扰动， $f(\sigma)$ 称为暗晕乘函数。Press et al. [55] 根据线性理论及球塌缩模型推导出了暗晕的质量分布函数，给出的乘函数的形式为

$$f(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\delta_c}{\sigma} \exp \left(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma^2} \right). \quad (1-46)$$

但是，数值模拟显示， δ_c 与暗晕质量函数的实际值要明显大于上述理论的预言。随后，Sheth et al. [56], Jenkins et al. [57], Tinker et al. [58] 等众多工作借助数值模拟，在不同宇宙学下，给出了不同乘函数的拟合结果，具体形式可参考 Murray et al. [59]。

1.3.2.3 其他方法

N 体数值模拟的最大弊端是需要消耗大量计算资源，且随着观测体积的增大，运算难度迅速增长。因此，人们提出了许多替代方法，在满足精度要求的同时，节省计算成本，加快计算速度。如 **FastPM**^[60]，**COLA**^[61]等快速算法，或者利用机器学习等方法快速生成模拟样本^[62-64]。

第二章 红移畸变

在第一章中，我们简要介绍了宇宙学的背景知识。在宇宙学探针中介绍了红移畸变的概念及成因。星系的本动速度会改变红移空间中星系的成团性，从各向同性变为各向异性。而本动速度直接反映了结构增长。因此，通过对红移畸变的精确测量及精确建模，能够精确测量宇宙的结构增长率 $f\sigma_8$ ，从而限制暗能量状态方程和宇宙学尺度上的引力性质。本章我们将详细介绍红移畸变的基本理论、若干红移畸变模型、及红移畸变的观测结果。

2.1 理论模型

想要利用红移畸变限制宇宙学，首先需要在理论上正确理解红移畸变。建立红移畸变的理论模型，可以基于傅立叶空间中的功率谱，也可以基于位形空间中的关联函数。

2.1.1 傅立叶空间中的红移畸变模型

§1.2.2.3 介绍了红移畸变的基本概念。红移畸变主要包含两个观测效应：大尺度上使成团性增强的 **Kaiser** 效应，以及小尺度上使成团性降低的 **FoG** 效应。根据这两个观测效应，我们可以得到一个简单的唯象模型：

$$P^s(k, \mu) = D^{\text{FOG}}(k\mu f\sigma_v) P^{\text{Kaiser}}(k, \mu). \quad (2-1)$$

其中，

$$P^{\text{Kaiser}}(k, \mu) = \begin{cases} (1 + f\mu^2)^2 P_{\delta\delta}(k) & ; \text{ linear} \\ P_{\delta\delta}(k) + 2\mu^2 P_{\delta\theta}(k) + \mu^4 P_{\theta\theta}(k) & ; \text{ nonlinear} \end{cases} \quad (2-2)$$

描述 **Kaiser** 效应， $\theta \equiv -\nabla \cdot \mathbf{v}/(aH)$ 为速度的散度。 μ 为 $\mathbf{k}$ 与视线方向夹角的余弦。 σ_v 为速度弥散。

$$D^{\text{FOG}}(x) = \begin{cases} \exp(-x^2) & ; \text{ Gaussian} \\ 1/(1+x^2) & ; \text{ Lorentzian} \end{cases} \quad (2-3)$$

描述 **FoG** 效应，通常可以选取高斯形式或洛伦兹形式。

从物质守恒出发， $(1 + \delta^s) d^3\mathbf{s} = (1 + \delta) d^3\mathbf{x}$ ，可得

$$1 + \delta^s = (1 + \delta) \left(1 + \frac{dv_{\parallel}}{dx_{\parallel}}\right)^{-1}. \quad (2-4)$$

若速度为无旋场, 则 $v_{\parallel} = -\partial/\partial x_{\parallel} \nabla^{-2} \theta$ 。在傅立叶空间中, $(\partial/\partial x_{\parallel})^2 \nabla^{-2} = (k_z/k)^2 = \mu^2$ 。因此在线性条件下

$$\delta^s(k) = \delta(k) + \mu^2 \theta(k) . \quad (2-5)$$

根据线性扰动理论, 速度场散度

$$\theta(k) = f \delta(k) , \quad (2-6)$$

其中, $f \equiv d \ln D / d \ln a \approx \Omega_m^{0.55}$ (参见 §1.3.1)。因此线性理论给出的红移空间功率谱为

$$P^s(k, \mu) = (1 + f \mu^2)^2 P_{\delta\delta}(k) . \quad (2-7)$$

上式即为公式2-2中的线性情况。Scoccimarro [65]使用三阶扰动在此基础上做了推广, 得到了公式2-2中的非线性结果。 $P_{\delta\delta}$ 、 $P_{\delta\theta}$ 、 $P_{\theta\theta}$ 的具体形式可参考原文公式63~69。FoG 为高度非线性效应, 其作用是在小尺度上压低功率谱, 与本动速度的统计量 σ_v 有密切关系, 将在后文中详细讨论。

显然, 利用红移畸变可以直接限制结构增长率 f 。修改引力与暗能量都能驱动宇宙的加速膨胀, 但二者对结构增长的预言可以存在差异。因此, 利用红移畸变对 f 的限制可以区分暗能量与修改引力。需要指出, 由于结构增长率 f 与物质功率谱的振幅存在简并, 通常把 σ_8 用做物质功率谱的归一化因子^①, 因此实际的测量量为 $f\sigma_8$ 。

2.1.1.1 TNS 模型^[66]

真实空间到红移空间的映射为

$$\mathbf{s} = \mathbf{x} + \frac{v_{\parallel}}{aH(z)} \hat{x} , \quad (2-9)$$

其中, $v_{\parallel} = \mathbf{v} \cdot \hat{x}$, 是本动速度 $\mathbf{v}$ 在视线方向 $\hat{x}$ 上的投影。 $H(z)$ 是红移 z 时的哈勃参数。在 single stream 的条件下, 根据物质守恒 $(1 + \delta^s(\mathbf{s})) d^3\mathbf{s} = (1 + \delta(\mathbf{x})) d^3\mathbf{x}$ 可得:

$$\delta^s(\mathbf{s}) = \left| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}} \right|^{-1} (1 + \delta(\mathbf{x})) - 1 . \quad (2-10)$$

^① σ_8 为 8Mpc/h 内物质的扰动幅度。 σ_r 满足

$$\sigma_r^2 = \int_0^{\infty} \frac{dk}{k} \left[\frac{3j_1(kr)}{kr} \right]^2 \Delta^2(k) , \quad (2-8)$$

其中, $j_1(x) \equiv \sin(x)/x - \cos(x)$, $\Delta^2(k) \equiv k^3 P(k)/(2\pi^2)$, $P(k)$ 为物质功率谱。

其傅立叶变换为

$$\delta^s(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{x} \left(\delta(\mathbf{x}) - \frac{\nabla_{\parallel} v_{\parallel}(\mathbf{x})}{aH(z)} \right) e^{i(k\mu v_{\parallel} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}. \quad (2-11)$$

其中 $\mu = k_{\parallel}/k$, 为 $\mathbf{k}$ 与视线方向夹角的余弦。公式中还利用到雅可比行列式 $|\partial\mathbf{s}/\partial\mathbf{x}| = 1 + \nabla_{\parallel} v_{\parallel}$ 。因此, 红移空间密度场的功率谱为

$$P^s(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{r}' e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} \left\langle e^{-ik\mu \Delta u_{\parallel}} (\delta(\mathbf{x}_1) + \nabla_{\parallel} u_{\parallel}(\mathbf{x}_1)) (\delta(\mathbf{x}_2) + \nabla_{\parallel} u_{\parallel}(\mathbf{x}_2)) \right\rangle_{\mathbf{r}'}, \quad (2-12)$$

其中, $\mathbf{r}' = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, 并定义 $\mathbf{u} \equiv -\mathbf{v}/(aH)$, $\Delta u_{\parallel} = u_{\parallel}(\mathbf{x}_1) - u_{\parallel}(\mathbf{x}_2)$ 。 $\langle \cdots \rangle_{\mathbf{r}'}$ 代表对间隔为 $\mathbf{r}'$ 的所有样本对取系综平均。公式2-12为红移空间功率谱的严格推导。

记

$$j_1 = -ik\mu, \quad (2-13)$$

$$A_1 = \Delta\mu = u_{\parallel}(\mathbf{x}_1) - u_{\parallel}(\mathbf{x}_2), \quad (2-14)$$

$$A_2 = \delta(\mathbf{x}_1) + \nabla_{\parallel} u_{\parallel}(\mathbf{x}_1), \quad (2-15)$$

$$A_3 = \delta(\mathbf{x}_2) + \nabla_{\parallel} u_{\parallel}(\mathbf{x}_2). \quad (2-16)$$

公式2-12中的系综平均项可以写为累积量的形式^[65]

$$\begin{aligned} \langle e^{j_1 A_1} A_2 A_3 \rangle &= \exp \{ \langle e^{j_1 A_1} \rangle_c \} \\ &\times \left[\langle e^{j_1 A_1} A_2 A_3 \rangle_c + \langle e^{j_1 A_1} A_2 \rangle_c \langle e^{j_1 A_1} A_3 \rangle_c \right], \end{aligned} \quad (2-17)$$

则

$$\begin{aligned} P^s(\mathbf{k}) &= \int d^3\mathbf{r}' e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} \exp \{ \langle e^{j_1 A_1} \rangle_c \} \\ &\times \left[\langle e^{j_1 A_1} A_2 A_3 \rangle_c + \langle e^{j_1 A_1} A_2 \rangle_c \langle e^{j_1 A_1} A_3 \rangle_c \right]. \end{aligned} \quad (2-18)$$

式中的 $\exp \{ \langle e^{j_1 A_1} \rangle_c \}$ 不可以运用扰动理论求解, 对应 FoG 效应。TNS 模型认为该项中不存在空间两点关联, 因此可以用单点统计表示为 $D^{\text{FOG}}(k\mu\sigma_{\mu_{\parallel}})$, 其中 $\sigma_{\mu_{\parallel}}$ 为视线方向的速度弥散, $\sigma_{\mu_{\parallel}}^2 \equiv \langle u_{\parallel}^2 \rangle$ 。中括号中的部分可以利用扰动理论处理。将 $e^{j_1 A_1}$ 对 j_1 做泰勒展开, 整理同类项并保留至 2 阶后得到:

$$\begin{aligned} \langle e^{j_1 A_1} A_2 A_3 \rangle_c + \langle e^{j_1 A_1} A_2 \rangle_c \langle e^{j_1 A_1} A_3 \rangle_c &\simeq \langle A_2 A_3 \rangle_c + j_1 \langle A_1 A_2 A_3 \rangle_c \\ &+ j_1^2 \left[\frac{1}{2} \langle A_1^2 A_2 A_3 \rangle_c + \langle A_1 A_2 \rangle_c \langle A_1 A_3 \rangle_c \right] + \mathcal{O}(j_1^3). \end{aligned} \quad (2-19)$$

其中 $\langle A_1^2 A_2 A_3 \rangle_c$ 在扰动理论的实际计算中为高阶项，可以省去。 $\langle A_2 A_3 \rangle_c$ 等价于 Kaiser 效应^[65]，对应于 $P_{\delta\delta} + 2\mu^2 P_{\delta\theta} + \mu^4 P_{\theta\theta}$ (公式2-2)。综上，公式2-18变为

$$P^s(k, \mu) = D^{\text{FOG}}(k\mu\sigma_{u\parallel}) \left[P_{\delta\delta}(k) + 2\mu^2 P_{\delta\theta}(k) + \mu^4 P_{\theta\theta}(k) + A(k, \mu) + B(k, \mu) \right]. \quad (2-20)$$

其中，

$$A(k, \mu) = j_1 \int d^3 \mathbf{r}' e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} \langle A_1 A_2 A_3 \rangle_c, \quad (2-21)$$

$$B(k, \mu) = j_1^2 \int d^3 \mathbf{r}' e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} \langle A_1 A_2 \rangle_c \langle A_1 A_3 \rangle_c. \quad (2-22)$$

将 $A(k, \mu), B(k, \mu)$ 分别表述为密度场 δ 与速度散度场 θ ，则

$$A(k, \mu) = (k\mu) \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{p_{\parallel}}{p^2} [B_{\sigma}(\mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{p}, -\mathbf{k}) - B_{\sigma}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, -\mathbf{k} - \mathbf{p})], \quad (2-23)$$

$$B(k, \mu) = (k\mu)^2 \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} F(\mathbf{p}) F(\mathbf{k} - \mathbf{p}). \quad (2-24)$$

其中， B_{σ} 为下式定义的 Bispectra：

$$\left\langle \theta(\mathbf{k}_1) \left[\delta(\mathbf{k}_2) + \frac{k_{2,\parallel}^2}{k_2^2} \theta(\mathbf{k}_2) \right] \left[\delta(\mathbf{k}_3) + \frac{k_{3,\parallel}^2}{k_3^2} \theta(\mathbf{k}_3) \right] \right\rangle \quad (2-25)$$

$$= (2\pi)^3 \delta_{3D}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) B_{\sigma}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3). \quad (2-26)$$

其中， F 为

$$F(\mathbf{p}) = \frac{p_{\parallel}}{p^2} \left[P_{\delta\theta}(p) + \frac{p_{\parallel}^2}{p^2} P_{\theta\theta}(p) \right]. \quad (2-27)$$

图2-1展示了红移空间功率谱与参考的平滑功率谱之比，点线为线性理论的计算结果。实线与虚线的 $P_{\delta\delta}$ 、 $P_{\delta\theta}$ 及 $P_{\theta\theta}$ 分别采用改进的扰动理论^[67-68]与标准扰动理论计算而得， A 与 B 均利用2-24计算而得。箭头展示了两种扰动理论的 $k_{1\%}$ ^①。计算时采用了高斯形式的 $D^{\text{FOG}}(k\mu\sigma_{\mu\parallel})$ ，其中，速度弥散 $\sigma_{\mu\parallel}$ 是对数值模拟计算结果的最佳拟合值。可以看到，TNS 模型在 $k = 0.05 \sim 0.15 h/\text{Mpc}$ 的范围内几乎完全与数值模拟中的计算结果重合，而唯象模型有百分之几的误差。

① $k_{1\%}$ 表示在该尺度下， $P_{\delta\delta}$ 与 N 体数值模拟的计算结果相比，精度可以控制在 1% 以内。 $k_{1\%}$ 可以通过求解下述方程得到^[68]，

$$\frac{k_{1\%}^2}{6\pi^2} \int_0^{k_{1\%}} dq P_{\text{lin}}(q; z) = C,$$

其中， $C = 0.7$ ， P_{lin} 为线性物质功率谱。

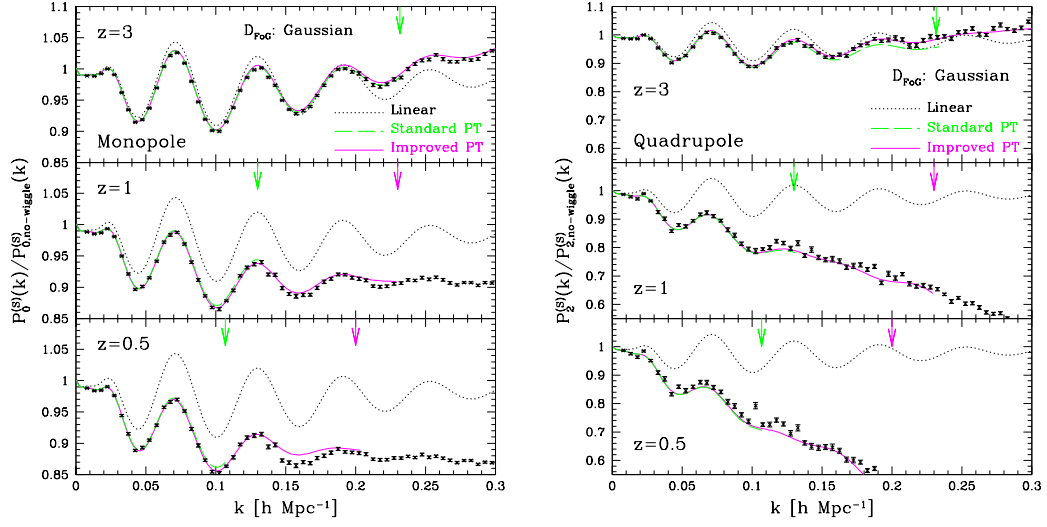


图 2-1 红移空间功率谱的单极矩 (左图) 及四极矩 (右图) 与参考功率谱之比^[66](公式2-20)。参考功率谱利用线性传递函数 (Transfer Function) 计算得到。点线为线性理论的计算结果。实线与虚线的 $P_{\delta\delta}$, $P_{\delta\theta}$ 及 $P_{\theta\theta}$ 分别采用改进的扰动理论^[67-68]与标准扰动理论计算而得, A 与 B 均利用2-24计算而得。箭头展示了两种扰动理论的 $k_{1\%}$ 。

Figure 2-1 Measurements for TNS model of redshift distortion (Eq.2-20). Solid and dashed lines represent the predictions for which the spectra $P_{\delta\delta}$, $P_{\delta\theta}$ and $P_{\theta\theta}$ are obtained from the improved PT including the correction up to the second-order Born correction, and one-loop calculations of the standard PT, respectively. In both cases, the corrections A and B given in Eqs.(2-24) are calculated from standard PT results. The vertical arrows indicate the maximum wavenumber $k_{1\%}$ for standard PT and improved PT (from left to right).

改进的 TNS 模型^[69-70]

TNS 模型假设 FOG 项 $D^{\text{FOG}}(k\mu\sigma_{\mu\parallel})$ 只存在单点速度统计, 并且忽略了公式2-19中的 $\langle A_1^2 A_2 A_3 \rangle_c$ 。Zheng et al. [69]在此基础上对 TNS 模型做了改进。首先, FOG 项 $D^{\text{FOG}}(k\mu\sigma_{\mu\parallel})$ 实际上由两部分组成, 单点的速度积累量 $D_{1\text{pt}}^{\text{FOG}}$, 以及速度场的两

点自关联 $D_{\text{corr}}^{\text{FOG}}$ ，证明如下

$$\begin{aligned}
\exp \{ \langle e^{j_1 A_1} \rangle_c \} &= \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} j_1^n \frac{\langle A_1^n \rangle_c}{n!} \right\} = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} j_1^{2n} \frac{\langle (u_{\parallel}(\mathbf{x}_1) - u_{\parallel}(\mathbf{x}_2))^{2n} \rangle_c}{(2n)!} \right\} \\
&= \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} j_1^{2n} \frac{2 \langle u_{\parallel}(\mathbf{x}_1)^{2n} \rangle_c}{(2n)!} \right\} \\
&\quad \times \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} j_1^{2n} \frac{\langle (u_{\parallel}(\mathbf{x}_1) - u_{\parallel}(\mathbf{x}_2))^{2n} \rangle_c - \langle u_{\parallel}(\mathbf{x}_1)^{2n} \rangle_c - \langle u_{\parallel}(\mathbf{x}_2)^{2n} \rangle_c}{(2n)!} \right\} \\
&= D_{\text{lpt}}^{\text{FOG}}(k\mu) \times D_{\text{corr}}^{\text{FOG}}(k\mu, \mathbf{r}) .
\end{aligned} \tag{2-28}$$

上式的推导利用了速度场的对称性。当 $\alpha + \beta = 2n + 1$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) 时，互关联 $\langle u_{\parallel}(\mathbf{x}_1)^{\alpha} u_{\parallel}(\mathbf{x}_2)^{\beta} \rangle_c = 0$ 。回到公式2-18, $D_{\text{lpt}}^{\text{FOG}}$ 不依赖于间隔 $\mathbf{r}$ ，因此可以提取至积分号外。定义约化后的累积量 $K_i \equiv \langle u^i \rangle_c / \sigma_z^i$ ，则 $D_{\text{lpt}}^{\text{FOG}}$ 可以改写为

$$D_{\text{lpt}}^{\text{FOG}}(k\mu) = \exp \left\{ j_1^2 \sigma_{\parallel}^2 + 2 \sum_{n=2}^{\infty} j_1^{2n} \sigma_z^{2n} \frac{K_{2n}}{(2n)!} \right\} , \tag{2-29}$$

其中，速度场的非高斯成分体现在高阶项中， K_{2n} ($n \geq 2$)。 $\sigma_{\parallel}^2$ 为速度场的弥散：

$$\sigma_{\parallel}^2 = \frac{1}{3} \int \frac{dk}{2\pi^2} P_{\theta\theta} . \tag{2-30}$$

积分号内，对比公式2-19，增加了 $D_{\text{corr}}^{\text{FOG}}$ 。同样，将 $e^{j_1 A_1}$ 对 j_1 做泰勒展开，整理同类项并保留至 2 阶后得到

$$\begin{aligned}
D_{\text{corr}}^{\text{FOG}}(k\mu, \mathbf{x}) \langle e^{j_1 A_1} A_2 A_3 \rangle_c &+ \langle e^{j_1 A_1} A_2 \rangle_c \langle e^{j_1 A_1} A_3 \rangle_c \simeq \langle A_2 A_3 \rangle_c + j_1 \langle A_1 A_2 A_3 \rangle_c \\
&+ j_1^2 \left[\frac{1}{2} \langle A_1^2 A_2 A_3 \rangle_c + \langle A_1 A_2 \rangle_c \langle A_1 A_3 \rangle_c - \langle u_{\parallel} u'_{\parallel} \rangle_c \langle A_2 A_3 \rangle_c \right] + \mathcal{O}(j_1^3) .
\end{aligned} \tag{2-31}$$

对比公式2-20，除 $A(k, \mu)$, $B(k, \mu)$ 外，改进后的模型额外考虑两项

$$T(k, \mu) = \frac{1}{2} j_1^2 \int d^3 \mathbf{r}' e^{i \mathbf{k} \mathbf{r}'} \langle A_1^2 A_2 A_3 \rangle_c , \tag{2-32}$$

$$F(k, \mu) = -j_1^2 \int d^3 \mathbf{r}' e^{i \mathbf{k} \mathbf{r}'} \langle u_{\parallel} u'_{\parallel} \rangle_c \langle A_2 A_3 \rangle_c . \tag{2-33}$$

TNS 模型中 j_1^2 项是扰动理论的高阶项，而这里的附加项 $F(k, \mu)$ 来自速度场的两点自关联。综上红移空间中的功率谱可以写为

$$\begin{aligned}
P^s(k, \mu) &= D^{\text{FOG}}(k\mu \sigma_{u_{\parallel}}) \left[P_{\delta\delta}(k) + 2\mu^2 P_{\delta\theta}(k) + \mu^4 P_{\theta\theta}(k) \right. \\
&\quad \left. + A(k, \mu) + B(k, \mu) + T(k, \mu) + F(k, \mu) \right] .
\end{aligned} \tag{2-34}$$

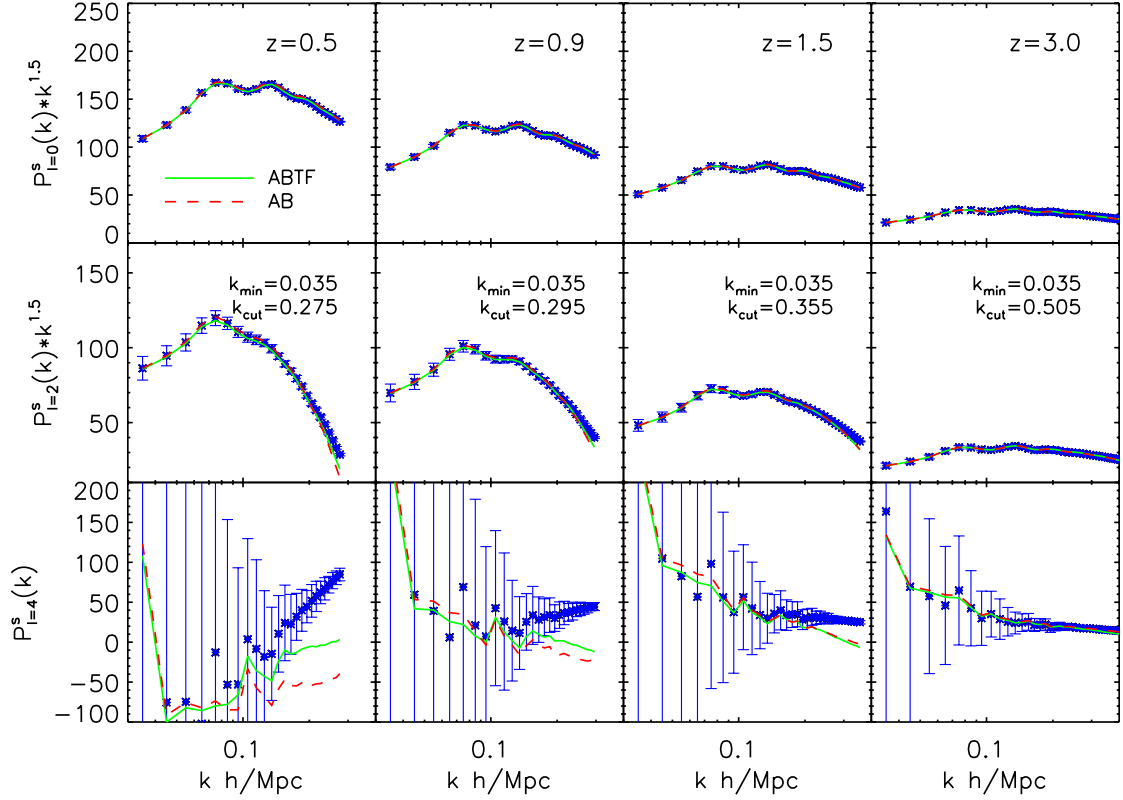


图 2-2 红移空间功率谱多极矩^[69]。从左至右分别为 $z = 0.5, 0.9, 1.5, 3.0$ 。从上至下分别为单极矩，四极矩及十六极矩。绿色实线为 $A + B + T + F$ ，红色虚线为 $A + B$ ，数据点为数值模拟中的测量结果，误差棒为 100 个数值模拟的标准差。

Figure 2-2 The multipole components of spectrum is presented at $z = 0.5, 0.9, 1.5$ and 3.0 from the first to fourth columns^[69]. Monopole, quadrupole and hexadecapole spectra are shown in the top, middle and bottom panels. The green solid curves represent the theoretical estimation using $A + B + T + F$ combination, the red dash curves represent the theoretical estimation using $A + B$ combination, and the cross points represent the directly observed multipoles. The error bars are the sample standard deviation from 100 simulation realizations.

$T(k, \mu)$ 与 $F(k, \mu)$ 的具体算法可以参考 Zheng et al. [69]。

图2-2展示了改进后的 TNS 模型 $A + B + F + T$ (绿色实线) 与原始 TNS 模型 $A + B$ (红色虚线) 的比较。数据点为数值模拟中的测量结果, 误差棒为 100 个数值模拟实现的标准差。 $D_{\text{ipt}}^{\text{FOG}}$ 采用高斯形式, $\sigma_{\parallel}$ 是对数值模拟计算结果的最佳拟合值。改进后的 TNS 模型可以在 $k \simeq 0.2h/\text{Mpc}$ 的尺度上, 使精度控制在 $\sim 2\%$ 。Zheng et al. [70]在暗晕数据中测量了改进后的 TNS 模型, 在多个红移与不同质量暗晕的样本中, 改进后的 TNS 模型都可以保持这一精度。

2.1.1.2 分布函数方法^[71-75]

如 §1.3.1.1所述, 粒子在相空间中的分布函数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ 的 0 阶矩为密度分布^①

$$\rho(\mathbf{x}) \equiv m_p \int d^3\mathbf{p} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) . \quad (2-35)$$

其中, m_p 为粒子质量, $\mathbf{x}$ 为粒子在真实空间中的位置, $\mathbf{p}$ 为粒子动量, 则红移空间中的密度分布为

$$\rho_s(\mathbf{s}) \equiv m_p \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{p} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \delta^D(\mathbf{s} - \mathbf{x} - \hat{\mathbf{r}} \frac{u_{\parallel}}{\mathcal{H}}) = m_p \int d^3\mathbf{p} f(\mathbf{s} - \hat{\mathbf{r}} \frac{u_{\parallel}}{\mathcal{H}}, \mathbf{p}) . \quad (2-36)$$

在傅立叶空间中可以得到密度扰动场

$$\delta_s(\mathbf{k}) = \sum_{L=0} \frac{1}{L!} \left(\frac{ik_{\parallel}}{\mathcal{H}} \right)^L T_{\parallel}^L(\mathbf{k}) . \quad (2-37)$$

其中, $\mathcal{H} = aH$ 为共形哈勃参数, $T_{\parallel}^L(\mathbf{k})$ 为

$$T_{\parallel}^L(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{x} T_{\parallel}^L(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} , \quad T_{\parallel}^L(\mathbf{x}) = \frac{m_p}{\bar{\rho}} \int d^3\mathbf{p} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) u_{\parallel}^L . \quad (2-38)$$

当 $L = 0$ 时, $T_{\parallel}^0 = \delta(\mathbf{k})$, 对应真实空间密度扰动场; 当 $L = 1$ 时, $T_{\parallel}^1 = (1 + \delta)\mu_{\parallel}(\mathbf{k})$, 对应沿视线方向的动量场; 当 $L = 2$ 时, $T_{\parallel}^2$ 对应能动张量; 依次类推。红移空间功率谱为

$$P^s(\mathbf{k}) = \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{L'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{L'}}{L!L'!} \left(\frac{ik_{\parallel}}{\mathcal{H}} \right)^{L+L'} P_{LL'}(\mathbf{k}) , \quad (2-39)$$

其中, $P_{LL'}(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \langle T_{\parallel}^L(\mathbf{k}) T_{\parallel}^{*L'}(\mathbf{k}') \rangle$ 。由于对称性, $P_{LL'}(\mathbf{k}) = P_{L'L}^*(\mathbf{k})$, 我们只需要考虑 $L \leq L'$ 的情况, 因此公式2-39可以写为

$$P^s(\mathbf{k}) = \sum_{L=0}^{\infty} \frac{1}{L!^2} \left(\frac{k\mu}{\mathcal{H}} \right)^{2L} P_{LL}(\mathbf{k}) + 2 \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{L'>L} \frac{(-1)^{L'}}{L!L'!} \left(\frac{ik\mu}{\mathcal{H}} \right)^{L+L'} P_{LL'}(\mathbf{k}) . \quad (2-40)$$

① 此处我们在固定红移讨论问题, 因此分布函数中省略了共形时间 τ 。

对 $T_{\parallel}^L(\mathbf{k})$ 做球谐函数展开

$$T_{\parallel}^L(\mathbf{k}) = \sum_{(l=L, L-2, \dots)} \sum_{m=-l}^{m=l} n_l^L T_l^{L,m}(\mathbf{k}) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (2-41)$$

则可以得到

$$P_{LL'}(\mathbf{k}) = \sum_{(\ell=L, L-2, \dots)} \sum_{(\ell'=L', L'-2, \dots; \ell' \geq \ell)} \sum_{m=0}^{\ell} P_{\ell, \ell'}^{L, L', m}(k) \mathcal{P}_{\ell}^m(\mu) \mathcal{P}_{\ell'}^m(\mu), \quad (2-42)$$

其中, $\mathcal{P}_{\ell}^m(\mu)$ 为连带勒让德多项式, 包含了所有与角度 μ 相关的信息。 $P_{\ell, \ell'}^{L, L', m}(k)$ 各向同性, 只与 k 值有关,

$$P_{\ell, \ell'}^{L, L', m}(k) \propto \langle T_{\ell}^{L, m}(\mathbf{k}) T_{\ell'}^{*, L', m}(\mathbf{k}') \rangle. \quad (2-43)$$

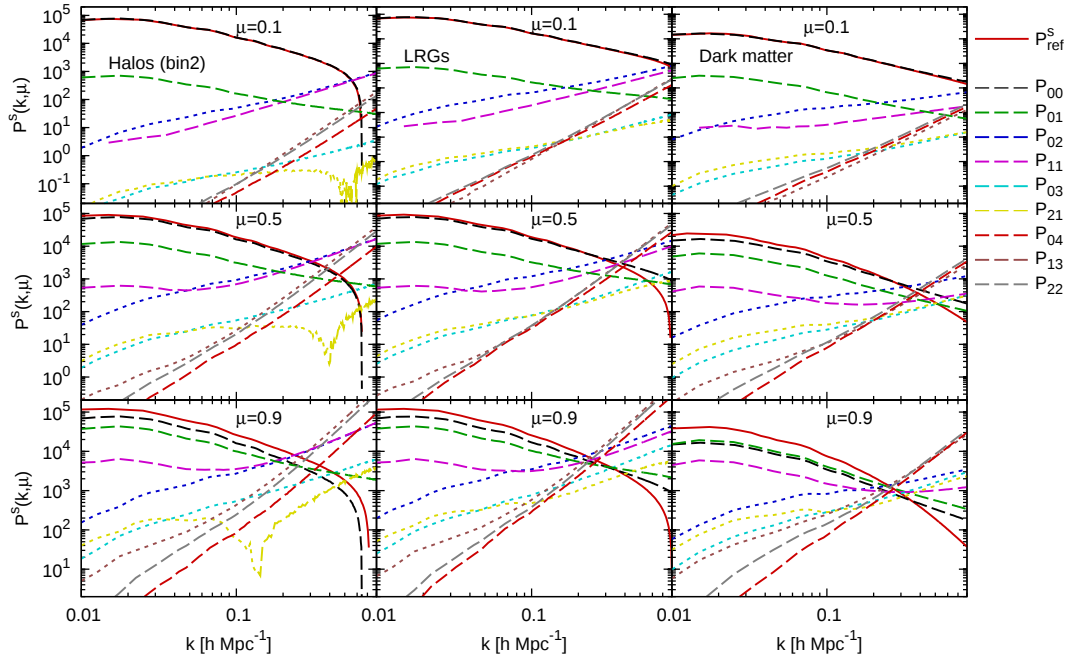


图 2-3 红移空间功率谱 (红色实线) 以及利用分布函数方法测量的各阶贡献 (虚线)^[72]。红移 $z = 0.5$ 。从左至右分别为暗晕, BOSS LRGs 样本, 以及暗物质。

Figure 2-3 Redshift space power spectrum (red solid line) and the individual contributions to it from the terms of the moments expansion of probability distribution approach (dashed lines) at $z = 0.5$ for halos (left), LRGs (middle) and dark matter (right)^[72].

分布函数方法将红移空间的功率谱展开为速度场各阶矩的互关联和自关联功率谱。(1) 对于最低阶, $P_{00}(\mathbf{k}) = P_{00}^{000}(k)$, 即真实空间功率谱。(2) P_{01} 为线性项,

正比于 μ^2 ，对红移空间功率谱的贡献满足

$$P_{01}^s = 2f\mu^2 P_{\text{lin}}(k). \quad (2-44)$$

(3) P_{11} 对红移空间功率谱的贡献可以分为两部分， $P_{1,1}^{1,1,0}$ 以及 $P_{1,1}^{1,1,1}$ ，其中， $P_{1,1}^{1,1,0}$ 的贡献依赖于 μ^4 ，根据线性扰动理论，满足

$$P_{1,1}^{1,1,0} = f^2 P_{\text{lin}}(k). \quad (2-45)$$

结合以上所有线性项，可以得到唯象模型中 Kaiser 效应的线性形式 (公式2-2)， $P_{\text{lin}}^s = (1 + f\mu^2)^2 P_{\text{lin}}$ 。另一项 $P_{1,1}^{1,1,1}$ 的贡献同时依赖于 μ^2 与 μ^4 ，但是对 μ^2 的贡献为正，对 μ^4 贡献为负。(4) 更高阶 P_{02} 的贡献与 FoG 有关，这里略去，详细信息可以参考原文 Seljak et al. [71]。图2-3展示了利用数值模拟以及 BOSS 亮红星系 (LRGs) 样本测量的红移空间功率谱，以及截断至 4 阶时各阶的贡献。

2.1.2 位形空间中的红移畸变模型

Peebles [76], Fisher [77], Reid et al. [78]等给出了计算红移空间关联函数的流模型。红移空间中的二维关联函数 $\xi^s(r_\sigma, r_\pi)$ 是星系对间隔在平行视线方向投影 r_π 与垂直视线方向投影 r_σ 的函数。 $s^2 = r_\sigma^2 + r_\pi^2$ ，其中， s 为星系对在红移空间中的距离。相比真实空间各向同性的关联函数 $\xi(r)$ ，在小尺度上，由于非线性演化的 FOG 效应， $\xi(r_\sigma, r_\pi)$ 沿视线方向被拉伸。相反，在大尺度上，由于 Kaiser 效应， $\xi(r_\sigma, r_\pi)$ 沿视线方向被压缩。 $\xi(r_\sigma, r_\pi)$ 的统计意义是，在红移空间中找到间隔为 (r_σ, r_π) 的星系对的概率与星系为泊松分布时的概率之差：

$$dp = \bar{n} d^3s d^3s' [1 + \xi(r_\sigma, r_\pi)], \quad (2-46)$$

其中， $\bar{n}$ 为星系平均密度。该概率也可以用真实空间的关联函数表示为

$$dp = \bar{n} d^3s d^3s' [1 + \xi(r)] p_v(V) \delta_D[r_\pi - y - \frac{y}{r} v_{12}(r) - V] dV dy, \quad (2-47)$$

其中， y 为真实空间中星系对距离在平行视线方向的投影，因此有 $r^2 = y^2 + r_\sigma^2$ 。 $v_{12}(r)$ 为相距 r 的星系对间的相对速度 (后文将称之为成对速度)， $v_{12} = v_1 - v_2$ 。 $(y/r)v_{12}$ 为成对速度在平行视线方向的投影。 p_v 是 V 的概率分布函数， V 为成对速度对 $v_{12}(r)$ 均值的偏差。 δ_D 为狄拉克 δ 函数。公式中的第一项表示在真实空间中找到距离为 r 的星系对的概率，后两项分布函数 p_v 与狄拉克函数将这一概率转换到了红移空间中。公式2-46与2-47右侧等价，对不可观测量 V 与 y 进行积分后，可以得到红移空间关联函数流模型的一般表达式：

$$\xi(r_\sigma, r_\pi) = \int dy \xi(r) p_v \left[r_\pi - y - \frac{y}{r} v_{12}(r) \right]_r. \quad (2-48)$$

下标 r 表示 p_v 是星系对距离为 r 时对应的概率分布函数。

Fisher [77] 假设密度场 δ 为高斯场，在线性理论中，速度场也为高斯场，因此他们的联合概率分布为多变量高斯分布。公式2-48可以写为

$$1 + \xi^s(r_\sigma, r_\pi) = \left\langle \int dy (1 + \delta_1)(1 + \delta_2) \delta_D(r_\pi - y + v_{12}) \right\rangle. \quad (2-49)$$

$\langle A \rangle$ 表示 A 在服从分布 p_v 时的期望值。用积分表示狄拉克函数可得：

$$1 + \xi^s(r_\sigma, r_\pi) = \left\langle \int dy (1 + \delta_1)(1 + \delta_2) \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(r_\pi - y + v_{12})} \right\rangle. \quad (2-50)$$

若 p_v 为高斯分布，则可以求得

$$\begin{aligned} 1 + \xi^s(r_\sigma, r_\pi) &= \int \frac{dy}{\sqrt{2\pi\sigma_{12}^2(y)}} \exp \left[-\frac{(r_\pi - y)^2}{2\sigma_{12}^2(y)} \right] \\ &\times \left\{ 1 + \xi^r(r) + \frac{y}{r} \frac{(r_\pi - y)v_{12}(r)}{\sigma_{12}^2(y)} - \frac{1}{4} \frac{y^2}{r^2} \frac{v_{12}^2(r)}{\sigma_{12}^2(y)} \left[1 - \frac{(r_\pi - y)^2}{\sigma_{12}^2(y)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2-51)$$

σ_{12} 为 v_{12} 的弥散。将公式2-51展开至线性项可得：

$$\xi^s(r_\sigma, r_\pi) = \xi^r(s) - \frac{d}{dy} \left[v_{12}(r) \frac{y}{r} \right] \Big|_{y=r_\pi} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} [\sigma_{12}^2(y)] \Big|_{y=r_\pi}. \quad (2-52)$$

这里， $\xi^r(s)$ 为真实空间中星系对在距离为 s 时的关联函数。其中，

$$-\frac{d}{dy} \left[v_{12}(r) \frac{y}{r} \right] \Big|_{y=r_\pi} = \frac{v_{12}(r)}{r} (\mu^2 - 1) - v'_{12}(r) \mu^2, \quad (2-53)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} [\sigma_{12}^2(y)] \Big|_{y=r_\pi} &= (2 - 10\mu^2 + 8\mu^4) \frac{\Psi_\perp(r) - \Psi_\parallel(r)}{r^2} \\ &+ (-5\mu^2 + 5\mu^4) \frac{\Psi'_\parallel(r)}{r} + (-1 + 6\mu^2 - 5\mu^4) \frac{\Psi'_\perp(r)}{r} \\ &- \mu^4 \Psi''_\parallel(r) + (-\mu^2 + \mu^4) \Psi''_\perp(r). \end{aligned} \quad (2-54)$$

在线性扰动理论中，本动速度场完全由密度场决定，则红移空间的关联函数可以写为^[79-81]

$$\begin{aligned} \xi^s(r_\sigma, r_\pi) &= (1 + \frac{2}{3}f + \frac{1}{5}f^2) \xi_0(s) \mathcal{P}_0(\mu) \\ &- (\frac{4}{3}f + \frac{4}{7}f^2) \xi_2(s) \mathcal{P}_2(\mu) + (\frac{8}{35}f^2) \xi_4(s) \mathcal{P}_4(\mu). \end{aligned} \quad (2-55)$$

其中， $f \approx \Omega_m^{0.55}$ 为线性理论的结构增长率。展开式中的系数为功率谱的各阶矩

$$\xi_\ell(s) = \frac{1}{2\pi^2} \int dk k^2 P(k) j_\ell(ks), \quad (2-56)$$

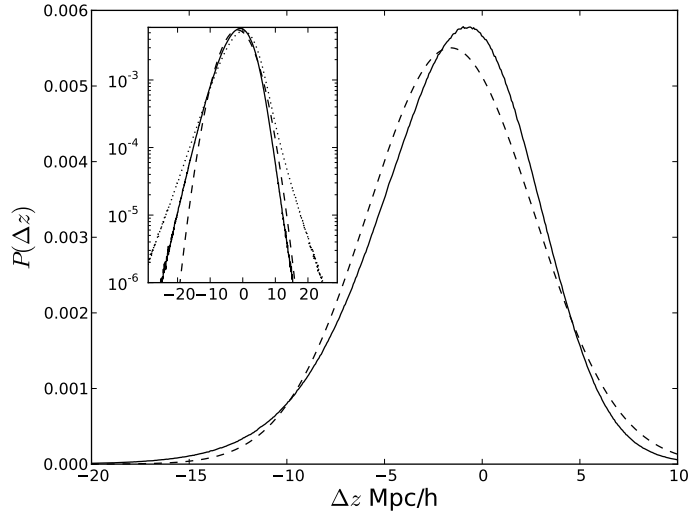


图 2-4 成对速度的概率分布函数^[78]。点线为暗物质粒子，实线为暗晕。虚线为假设高斯分布时的结果，其均值与方差由数值模拟测量得到。粒子/暗晕对的距离为 $30\text{Mpc}/h < r < 31.5\text{Mpc}/h$ 。子图纵坐标采用了 log 坐标。

Figure 2-4 Pairwise velocity PDF for dark matter particles (dotted line) and halos (solid line)^[78].

The dashed line is the result for Gaussian assumption with expectation and variance directly measured from simulation. The pair separation is $30\text{Mpc}/h < r < 31.5\text{Mpc}/h$. The inset panel adopts the log scale for y-axis.

$j_\ell(x)$ 与 $\mathcal{P}_\ell(x)$ 分别为 ℓ 阶的球贝塞尔函数及勒让德多项式。

当考虑非线性扰动时，问题将变得十分复杂（参见 Matsubara [82]，附录 B）。流模型说明，红移空间的关联函数由真实空间的关联函数与成对速度场概率分布函数决定。Scoccimarro [65]证明，成对速度场的概率分布函数虽然是非高斯的，但是在峰值处近高斯。因此在高斯假设下，公式2-51可以近似写为

$$1 + \xi^s(r_\sigma, r_\pi) = \int [1 + \xi(r)] e^{-[r_\pi - y - \mu v_{12}(r)]^2 / 2\sigma_{12}^2(r, \mu)} \times \frac{dy}{\sqrt{2\pi\sigma_{12}^2(r, \mu)}}, \quad (2-57)$$

其中， $\mu = y/r$ 。上式即为高斯流模型^[78]。

图2-4展示了间隔为 $30h/\text{Mpc} < r < 31.5h/\text{Mpc}$ 时，成对速度的概率分布函数^[78]。实线为数值模拟中对暗晕直接统计的结果。点线为数值模拟中，对暗物质粒子直接统计的结果。虚线为假设高斯分布时的结果，均值与方差均直接测量自数值模拟。可以看到，非线性演化导致暗晕的成对速度分布函数显著的偏离了高斯分布。

图2-5展示了利用高斯流模型算得的红移空间关联函数的多极矩与线性结果

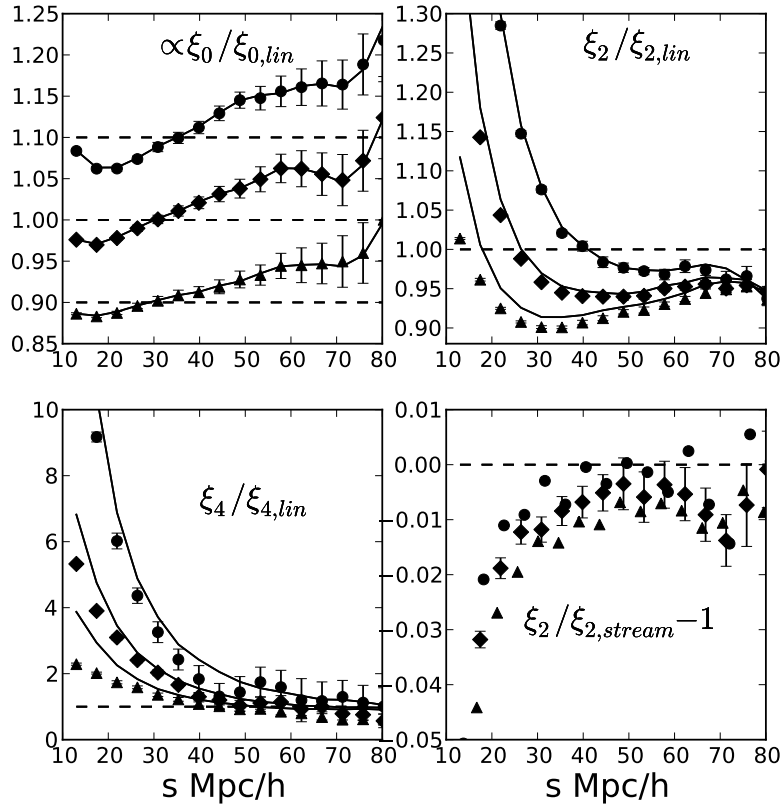


图 2-5 高斯流模型在数值模拟中的检验^[78]。左上、右上、左下子图分别为单极矩、四极矩、十六极矩的计算值与线性结果之比。数据点为数值模拟中的测量结果，实线为高斯流模型的计算结果。右下子图展示了高斯流模型对数值模拟中四极矩测量的相对误差。

Figure 2-5 Constraining test for Gaussian streaming model in simulation^[78]. The solid lines are the ratio of results from Gaussian streaming model to linear model for monopole (upper left), quadrupole (upper right) and hexadecapole (lower left). The data points are the results from simulation. The lower right panel illustrates the relative error between streaming model and simulation for quadrupole.

之比。圆形，菱形，三角形分别代表数值模拟中三组不同质量暗晕样本的计算结果。实线为利用高斯流模型 (公式2-57) 计算的结果，均值与方差均使用数值模拟中对应样本的直接测量值。右下角展示了高斯流模型对数值模拟中四极矩 ξ_2 测量的相对误差。可以看到，高斯流模型在较大尺度 ($> 30\text{Mpc}/h$) 可以较准确的还原数值模拟中的结果，而在更小尺度，高斯流模型无法准确描述红移畸变效应。

流模型对红移畸变刻画的精度取决于对成对速度概率分布函数的理解。高斯流模型采用的高斯假设是一种对称分布假设，但数值模拟中的结果显示，成对速度概率分布函数在粒子距离 $2\text{Mpc}/h < r < 100\text{Mpc}/h$ 时都呈现出了非对称性^[65]。因此，许多工作也提出了其他分布假设。例如，Bianchi et al. [83]提出了双高斯分布假设，Cuesta-Lazaro et al. [84]提出了 Skewed Student-T 分布假设等，可以在更小的尺度上描述红移畸变。

2.1.2.1 小结

上述我们只介绍了部分使用较为广泛的几个红移畸变的理论模型，我们在表格2-1中列出了更多模型以供参考。

在构建红移畸变的理论模型时，各种模型都同时面临着以下几个困难：

1. 首先是红移空间到真实空间的映射问题。该映射是非线性且非定域的，红移空间中任意两点的关联函数都是对真实空间中 n 点关联函数在各尺度的积分，而非简单的线性映射。例如，对于傅立叶空间中的红移畸变模型，功率谱中每个 $\mathbf{k}$ 模都取决于真实空间中不同统计量在各尺度上的积分；对于位形空间中的流模型，关联函数由不同距离的成对粒子关联函数共同决定。
2. 其次是结构形成中的非线性演化问题，即密度场与速度场本身的非线性演化。非线性演化大大加深了对结构增长的理解难度，是现代宇宙学研究中的核心问题之一。
3. 最后需要说明，上述讨论全部针对的是暗物质场，而实际观测中只能得到星系的分布，需要考虑星系-暗物质间复杂的非线性关系。例如，对于星系，公式2-7变为，

$$P_g^s(k, \mu) = (b_g + b_v f \mu^2)^2 P_\delta(k) = b_g^2 (1 + b_v \beta \mu^2)^2 P_\delta(k) . \quad (2-58)$$

其中， b_g 为星系对物质的密度偏袒因子。 $\beta = f/b_g$ ， f 为线性结构增长率。 b_v 为星系对物质的速度偏袒因子。 b_g 与 b_v 分别描述大尺度上，作为示踪体的星系与暗物质间在密度统计量及速度统计量中存的偏袒 (bias)。星系

与暗物质间存在的各种统计效应带来的不确定关系，及非线性偏袒等，会导致严重的系统误差。关于星系的偏袒可以参考 Desjacques et al. [85]。星系的速度偏袒一直是红移畸变宇宙学中未被解决的一个问题，实际观测中通常假设速度偏袒 $b_v = 1$ 。本文第三章将针对星系的速度偏袒进行详细的讨论。

几乎所有红移畸变的模型都是围绕上述几个问题进行展开研究。随着观测技术的进步，在精确宇宙学时代，如何正确理解红移畸变中存在的这些非线性效应已经变成迫在眉睫的问题。

Paper	Title	remarks
Kaiser [79]	Clustering in real space and in redshift space	Kaiser
Fisher [77]	On the Validity of the Streaming Model for the Redshift-Space Correlation Function in the Linear Regime	Streaming
Scoccimarro [65]	Redshift-space distortions, pairwise velocities, and nonlinearities	Scoccimarro
Tinker [86]	Redshift-space distortions with the halo occupation distribution - II. Analytic model	halo
Matsubara [82]	Resumming cosmological perturbations via the Lagrangian picture: One-loop results in real space and in redshift space	Matsubara
Taruya et al. [66]	Baryon acoustic oscillations in 2D: Modeling redshift-space power spectrum from perturbation theory	TNS
Seljak et al. [71]	Distribution function approach to redshift space distortions	DF Approach
Zhang et al. [87]	Peculiar velocity decomposition, redshift space distortion, and velocity reconstruction in redshift surveys: The methodology	v decomposition
Bianchi et al. [83]	Improving the modelling of redshift-space distortions - I. A bivariate Gaussian description for the galaxy pairwise velocity distributions	Streaming
Zheng et al. [69]	Study on the mapping of dark matter clustering from real space to redshift space	Advanced TNS
Kuruvilla et al. [88]	On the streaming model for redshift-space distortions	Streaming
Lewandowski et al. [89]	On the EFT of Large Scale Structures in Redshift Space	EFT review
Vlah et al. [90]	Exploring redshift-space distortions in large-scale structure	Fourier Streaming
Cuesta-Lazaro et al. [84]	Towards a non-Gaussian model of redshift space distortions	Streaming

表 2-1 红移畸变的理论模型。

Table 2-1 Theoretical models for RSD.

2.2 观测与测量

2.2.1 限制宇宙学参数的一般过程

观测中利用红移畸变限制宇宙学需要首先测量星系的两点关联函数或功率谱，其中，关联函数的测量较为直接。根据关联函数的定义，可以构建不同的关联函数估计量，常见的有

$$\xi = \begin{cases} (DD/DR) - 1, & \text{Davis \& Peebles 1983} \\ (DD - DR)/RR, & \text{Hewett 1982} \\ (DD - RR)/DR^2, & \text{Hamilton 1993} \\ (DD - 2DR + RR)/RR. & \text{Landy \& Szalay 1993} \end{cases} \quad (2-59)$$

其中， D 表示观测样本， R 表示随机样本。 DD, RR, DR 分别表示观测样本自身、随机样本自身、以及观测样本与随机样本间的平均星系对数。归一化系数分别为 $n_D(n_D - 1)/2$, $n_R(n_R - 1)/2$, $n_D n_R$, n 为对应的样本数目。Pons-Bordería et al. [91], Kerscher et al. [92]通过比较上述各种估计量，推荐采用 Landy-Szalay(LS) 形式。

利用大量观测数据限制宇宙学参数，最常用的统计学方法为贝叶斯方法。将观测数据与理论模型分别用向量 $\mathbf{d}(\text{data})$, $\mathbf{t}(\text{theory})$ 表示，其中，理论模型依赖宇宙学参数或其他冗余参数 (nuisance), $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\alpha_i, \beta_i)$ 。用 $p(\mathbf{t}|\mathbf{d})$ 表示满足观测数据时，理论模型成立的条件概率，则贝叶斯公式可以写为

$$p(\mathbf{t}|\mathbf{d})p(\mathbf{d}) = p(\mathbf{d}|\mathbf{t})p(\mathbf{t}). \quad (2-60)$$

观测数据成立的概率 $p(\mathbf{d}) = 1$ ，则公式变为， $p(\mathbf{t}|\mathbf{d}) = p(\mathbf{d}|\mathbf{t})p(\mathbf{t})$ ，其中， $p(\mathbf{t})$ 为先验概率。因此，寻求满足观测数据的最优理论解，实际上就是求解 $p(\mathbf{t}|\mathbf{d})$ 的极大值。

宇宙学中最常使用极大似然估计 (MLE) 来计算这一概率极值。定义似然函数 (Likelihood function)

$$\mathcal{L} = \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{ij} (\mathbf{d} - \mathbf{t})_i \mathbf{C}_{ij}^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{t})_j \right], \quad (2-61)$$

其中， $\mathbf{C}$ 为数据与理论的协方差矩阵， $\mathbf{C} = (\mathbf{d} - \bar{\mathbf{d}})^T (\mathbf{d} - \bar{\mathbf{d}}) / (N - 1)$ ， N 为数据点的个数。 $\bar{\mathbf{d}} = \sum_k (\mathbf{d}_k) / N$ ，由于可观测宇宙的唯一性， $\mathbf{d}_k$ 需要利用数值模拟生成的伪观测样本 (mock) 进行计算。当似然函数取极大值时，符合理论模型的宇宙学参数即为最佳拟合值 α_{best} 。当涉及参数较多时，直接求解似然函数的极值非常困难，数值上常用马尔可夫链蒙特卡洛 (MCMC) 方法进行计算。

2.2.2 红移畸变的相关观测

CfA CfA(Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics) 共分为两期。1977 年至 1982 年为第一期 (CfA1), 观测目标为亮度 > 14.5 的 UGC 星系 (The Uppsala General Catalogue of Galaxies)。共得到了三大星系团 Virgo, Coma 以及 A1367 中 2 400 个星系的红移数据。1983 年, Davis et al. [93] 利用筛选后的 1 230 个星系, 分别测量了一维及二维关联函数。结果指出, 在 $r \lesssim 10\text{Mpc}/h$ 时, 关联函数 $\xi_g(r)$ 近似服从指数函数的形式 $(r_0/r)^\gamma$ 。文章以 $\gamma = 1.77$ 作为基准, 得到 $r_0 = 5.4 \pm 0.3 h/\text{Mpc}$, 最后利用 $\leq 1h/\text{Mpc}$ 的数据给出 $\Omega_m = 0.2e^{\pm 0.4}$ 。CfA2 为 1985 年至 1995 年, 共得到了北天 18 000 个星系的红移数据。CfA 第一次给出了近邻宇宙星系的分布图像, 也是第一个严格意义上对星系成团性的测量。

2dFGS 2dF 星系红移巡天 (two-degree-field galaxy redshift survey) 使用澳大利亚的 3.9 米口径望远镜, 从 1997 年至 2002 年, 共观测得到了 221 414 个星系的红移数据, 覆盖了 $1\,500\text{deg}^2$ 的天区。Peacock et al. [94] 利用其中 141 000 个星系, 更精确地测量了星系的成团性, 得到结构增长率 $\beta = 0.43 \pm 0.07$ 。文章进一步利用星系数据与 CMB 数据的共同限制, 给出 $\Omega_m \sim 0.3$, 结果符合一个低物质密度的宇宙。

VVDS VVDS(VIMOS VLT Deep Survey) 按照星系亮度分为三类不同深度的巡天, Wide ($17.5 \leq i_{AB} \leq 22.5$; 8.6deg^2), Deep ($17.5 \leq i_{AB} \leq 24$; 0.6deg^2), 以及 Ultra-Deep ($23 \leq i_{AB} \leq 24.75$; 512arcmin^2)。分别得到了 22 434, 12 051, 1 041 个星系样本的数据, 红移分布的范围为 $0 < z < 6.7$ 。Guzzo et al. [95] 利用 VVDS-Wide 中的 10 000 个暗星系, 在有效红移 $z_{\text{eff}} = 0.77$ 处, 测得结构增长率为 $f = 0.91 \pm 0.36$ 。文章的结果与 Peacock et al. [94] 一致, 都符合一个低密度且平直的 ΛCDM 。

6dFGS 6dFGS 为 2dFGS 的后续巡天, 时间从 2001 年至 2009 年, 共观测得到了 125 000 个星系的红移数据。Beutler et al. [96] 使用 6dFGS 及 WMAP 的数据, 利用 BAO, 在有效红移 $z_{\text{eff}} = 0.106$ 处, 测得哈勃常数 $H_0 = 67 \pm 3.2\text{km/s/Mpc}$, 暗能量状态方程 $w = -0.97 \pm 0.13$ 。Beutler et al. [97] 使用 6dFGS 的 81 971 个星系, 利用 RSD, 在有效红移 $z_{\text{eff}} = 0.067$ 处, 得到结构增长率 $f\sigma_8 = 0.423 \pm 0.055$ 。

SDSS 斯隆巡天 (Sloan Digital Sky Survey, SDSS) 是迄今为止影响最大、对宇宙学贡献最大的星系巡天, 从 2000 年至今, 已经经历了 4 期。SDSS-I 从 2000 年到 2005 年, 进行了 $8\,000\text{deg}^2$ 的测光巡天, 并且获得了其中 $5\,700\text{deg}^2$ 的光谱数据。

SDSS-II 从 2005 年至 2008 年, 进一步完成了光谱数据的采集, 结束时共获得了超过百万个星系, 以及 100 000 个类星体的光谱数据。Tegmark et al. [98] 利用 SDSS DR4 中的亮红星系 (LRGs), 结合 WMAP, 测得 $\Omega_m = 0.24 \pm 0.02$, $w = -0.94 \pm 0.09$ 。SDSS-III 从 2008 年至 2014 年, 共包含三个项目, 分别为 APOGEE 及 SEGUE-2: 测量银河系的结构及演化; MARVELS: 在近邻恒星中寻找系外行星; 以及 BOSS: 星系的大尺度结构分布。BOSS 从 2019 年开始至 2014 年, 在 $10\,000\text{deg}^2$ 的天区内共观测得到了 150 万个星系的光谱, 红移达到了 $z = 0.7$ 。Samushia et al. [99] 使用 BOSS DR11 的星系样本, 在有效红移 $z_{\text{eff}} = 0.57$ 处, 测得结构增长率 $f\sigma_8 = 0.441 \pm 0.044$ 。Alam et al. [100] 使用最终的 BOSS DR12 数据, 分别在有效红移 $z_{\text{eff}} = 0.32, 0.51$ 及 0.61 处, 得到 $f\sigma_8 = 0.497 \pm 0.045, 0.458 \pm 0.038$ 以及 0.436 ± 0.034 。SDSS-IV 从 2014 年至 2020 年, 包含三个主要项目, APOGEE-2: 银河系恒星光谱巡天; eBOSS: 将 BOSS 外延至更高红移的类星体; 以及 MaNGA: 利用积分场单元 (IFU) 观测约 10 000 个近邻星系的内部结构。Hou et al. [40], Gil-Marín et al. [101], Bautista et al. [102], de Mattia et al. [103], Tamone et al. [104] 等分别利用 eBOSS 的亮红星系 (LRGs), 发射线星系 (ELGs), 以及类星体 (QSOs) 在不同红移测量了结构增长率。更多结果可以参考表 2-2 及图 2-6。

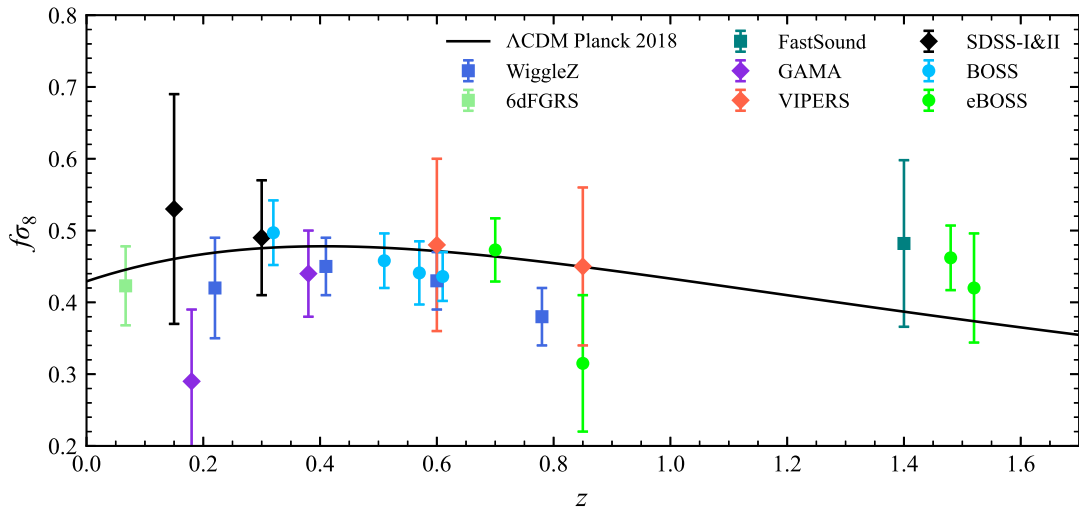


图 2-6 我们利用收集到的数据绘制而成的目前对 $f\sigma_8$ 的测量结果。黑色实线为 Planck 2018 ΛCDM 模型给出的结果。

Figure 2-6 Measurements of $f\sigma_8$ in observations. The black solid line is the result of Planck 2018 ΛCDM model.

图 2-6 展示了不同观测在不同红移下对结构增长率 $f\sigma_8$ 的限制结果。黑色实

Survey	z_{eff}	growth rate	reference
2dFGRS	0.11	$\beta = 0.43 \pm 0.07$	Peacock et al. [94]
	0.15	$\beta = 0.49 \pm 0.09$	Hawkins et al. [105]
	0	$\beta = 0.58 \pm 0.08$	Percival et al. [106]
VVDS	0.77	$\beta = 0.70 \pm 0.26$	Guzzo et al. [95]
WiggleZ	0.22	$f\sigma_8 = 0.42 \pm 0.07$	Blake et al. [107]
	0.41	$f\sigma_8 = 0.45 \pm 0.04$	
	0.60	$f\sigma_8 = 0.43 \pm 0.04$	
	0.78	$f\sigma_8 = 0.38 \pm 0.04$	
6dFGRS	0.067	$f\sigma_8 = 0.423 \pm 0.055$	Beutler et al. [97]
FastSound	1.40	$f\sigma_8 = 0.482 \pm 0.116$	Okumura et al. [108]
GAMA	0.18	$f\sigma_8 = 0.36 \pm 0.09$	Blake et al. [109]
	0.38	$f\sigma_8 = 0.44 \pm 0.06$	
	0.18	$f\sigma_8 = 0.29 \pm 0.10$	Simpson et al. [110]
VIPERS	0.60	$f\sigma_8 = 0.48 \pm 0.12$	de la Torre et al. [111]
	0.86	$f\sigma_8 = 0.48 \pm 0.10$	
	0.85	$f\sigma_8 = 0.45 \pm 0.11$	Mohammad et al. [112]
SDSS-I&II	0.30	$f\sigma_8 = 0.49 \pm 0.08$	Oka et al. [113]
	0.15	$f\sigma_8 = 0.53 \pm 0.16$	Howlett et al. [114]
SDSS-III BOSS	0.57	$f\sigma_8 = 0.441 \pm 0.044$	Samushia et al. [99]
	0.32	$f\sigma_8 = 0.497 \pm 0.045$	Alam et al. [100]
	0.51	$f\sigma_8 = 0.458 \pm 0.038$	
	0.61	$f\sigma_8 = 0.436 \pm 0.034$	
SDSS-IV eBOSS	0.70	$f\sigma_8 = 0.448 \pm 0.043$	Bautista et al. [102]
	0.698	$f\sigma_8 = 0.473 \pm 0.044$	Gil-Marín et al. [115]
	0.85	$f\sigma_8 = 0.315 \pm 0.095$	de Mattia et al. [103]
	1.48	$f\sigma_8 = 0.462 \pm 0.045$	Hou et al. [40]
	1.52	$f\sigma_8 = 0.420 \pm 0.076$	Gil-Marín et al. [101]

表 2-2 红移畸变的部分观测结果。

Table 2-2 Selected observational constraints for growth rate.

线为采用 Planck 2018 Λ CDM 模型参数的预测结果。表2-2列出了更多数据及参考文献。

上文介绍的都是已经完成的巡天计划，大致可以分为三代。它们的结果虽然基本符合 Λ CDM 模型的预言，但由于统计误差仍相对显著，因此，依旧不能排除现存的许多修改引力及暗能量模型的可能性。正在进行的第四代，以及未来第五

代的暗能量巡天将会进一步降低统计误差。

DESI 暗能量光谱仪 (Dark Energy Spectroscopic Instrument, DESI) 利用美国 Kitt 峰国家天文台的 4 米口径望远镜, 从 2021 年开始, 将利用五年的时间, 采集约 3000 万星系的光谱, 覆盖天区达到 $14\,000\text{deg}^2$ ^[116]。主要观测四类目标, 红移 $z = 1$ 范围内的亮红星系, 红移 $z = 1.7$ 内的发射线星系, 红移 $2.1 < z < 3.5$ 内的类星体, 以及低红移 $0.1 \lesssim z \lesssim 0.3$ 左右的亮星系。利用红移畸变, DESI 可以在多个红移段内将结构增长率限制在约 1% 的精度。

PFS PFS(Prime Focus Spectrograph) 利用夏威夷 8.5 米口径 Subaru 望远镜, 计划从 2022 年开始, 对 $1\,400\text{deg}^2$ 的天区进行深度巡天, 主要观测红移范围 $0.8 \leq z \leq 2.4$ 内的发射线星系^[117]。相比 DESI, PFS 的天区面积虽小, 但可以观测到更高红移内的发射线星系和更高的星系数密度。

Euclid Euclid 为太空望远镜, 计划 2022 年发射。Euclid 分为 Wide Survey 与 Deep Survey 两部分。Wide Survey 计划用 6 年时间, 在 $15\,000\text{deg}^2$ 内, 观测 3000 万个星系, 红移可达 $z \sim 2$; Deep Survey 作为 Wide Survey 的补充, 共挑选了三个受银河系恒星影响最小的区域, 可以观测更暗的星系, 其观测的总面积为 40deg^2 。主要包含四项科学目标: 测定暗能量状态方程, 结构增长率, 中微子总质量, 以及原初非高斯性^[118]。

CSST 中国空间站望远镜 (Chinese Space Station Telescope, CSST) 依托中国空间站的建设, 计划于 2023/2024 年发射^[119]。CSST 的光学巡天 (CSS-OS) 包含测光及光谱两部分, 将利用 10 年时间对 $17\,500\text{deg}^2$ 内的天区进行观测。对于光谱巡天, 被测星系的红移可达 $z \sim 2$ 。

第四代及第五代暗能量巡天可以将结构增长率的统计误差限制在 1% 以内。为了满足这一精度的要求, 必须在理论上同时构建精确的红移畸变模型。即解决 §2.1.2.1 中提及的三个主要问题。在第三章我们将讨论暗晕的速度偏袒问题。第四章将研究真实空间至红移空间的映射。第五章中, 我们则利用深度学习的方法, 试图同时解决红移畸变中存在的各种非线性效应。

第三章 速度偏袒的精确测量

理论上虽然可以利用物质增长限制宇宙学，但是实际观测中的观测对象为星系。如 §2.1.2.1 所述，星系作为物质场的示踪体会引入偏袒，这种偏袒不仅存在于密度分布中，同时存在于速度分布中。若想通过红移畸变精确测量宇宙的物质增长及演化，需要精确理解星系的密度偏袒 b_g 及速度偏袒 b_v 。对于速度偏袒，在红移畸变的测量中，人们通常采用 $b_v = 1$ 的假设。但是由于采样偏差的存在，该假设并没有在数值模拟中得到验证。在数值模拟中，星系对物质的偏袒在大尺度上可以首先简化为暗物质晕对物质的偏袒。本章将介绍如何在数值模拟中精确测量暗晕的速度偏袒。

3.1 研究背景

如前所述，红移畸变宇宙学中通常会采用一个很强的假设：星系/暗晕与暗物质之间不存在速度偏袒（velocity bias）。根据弱等效原理，在大于 10Mpc 的尺度上，引力场由物质的大尺度分布所决定，而非个别的物质束缚形式（如星系或暗物质晕等）。在该尺度上，星系或暗晕已经不是主导引力场的主要成分，可以被当作引力场中的测试粒子。因此，星系或暗晕的运动应当遵循大尺度结构中物质的运动规律，即在 $\geq 10\text{Mpc}$ 时，速度的偏袒因子 $b_v = 1$ 。

但是，这一论述忽略了一个显而易见的事实：星系或暗晕都分布在物质场中的高密度区域。并且，密度梯度与速度场存在紧密的关联。具有开创性意义且广为人知的 BBKS^[120] 利用单点高斯统计，预言 $\sigma_{v,\text{halo}}^2 < \sigma_{v,\text{matter}}^2$ 。Desjacques et al.^[121] 将单点统计推广到了两点统计，并推导出 $b_v(k) = 1 - R_v^2 k^2 < 1$ 。其中，因子 R_v 依赖于暗晕质量 M 但与红移 z 无关。文章得到的速度偏袒 b_v 在大尺度上 $\gg 10\text{Mpc}$ 也显著的偏离 1。例如，对原初质量为 $10^{13} M_\odot/h$ 的暗晕，在 $k = 0.1(0.2)h/\text{Mpc}$ 的尺度上， $b_v \simeq 0.93(0.73)$ ^[122]。后续的理论及数值工作（如 Elia et al.^[122], Chan et al.^[123], Baldauf et al.^[124], Chan^[125] 等），进一步研究并证实了 Desjacques et al.^[121] 的结论。但是，以上这些工作的研究对象全部是原初暗晕（在线性演化阶段，物质场为近高斯场的条件下），而非真实暗晕。因为原初暗晕与真实暗晕间的关系存在随机性，以及暗晕速度本身复杂的非线性演化^[126]，尚不清楚这些结论是否可以从原初暗晕推广到真实暗晕的速度场中。

因此，尽管经历了几十年的努力，速度偏袒依然是一个悬而未决的问题。这从根本上限制了未来本动速度宇宙学的研究^[127]，尤其是对第四代暗能量巡天（参

见 DESI Collaboration et al.^[116], Schlegel et al.^[128], Abdalla et al.^[129], Spergel et al.^[130], Amendola et al.^[131])。这些巡天的科学目标是通过红移畸变在 1% 或更高精度上限制结构增长率 $f(z)\sigma_8(z)$ 。在实际测量中, 红移畸变真正的测量量是速度偏袒与结构增长率的乘积 $b_v \times f\sigma_8$ 。因此对速度偏袒的理解如果存在系统误差, 这会导致对 $f\sigma_8$ 的测量也产生系统误差,

$$\left. \frac{\delta(f\sigma_8)}{f\sigma_8} \right|_{k,z} \simeq - \left. \frac{\delta(b_v)}{b_v} \right|_{k,z}. \quad (3-1)$$

b_v 在理论上依赖于尺度 k 。因此, 产生的系统误差取决于小尺度上对 $k_{\max}$ 的截断 (即只使用 $k \leq k_{\max}$ 的信息)。在本动速度宇宙学的研究中存在各种截断选取。DESI Collaboration et al.^[116] 在项目预测中采用 $k_{\max} = 0.2h/\text{Mpc}$ 。eBOSS 团队在类星体的功率谱分析中采用 $0.3h/\text{Mpc}$, 而在类星体的关联函数分析中采用 $r \sim 20\text{Mpc}/h$ ^[101,132-135]。更具野心的第五代暗能量巡天^[136]可以在更小的尺度上测量红移畸变, 达到 $k_{\max} = 0.5h/\text{Mpc}$, 能够更显著的提升对宇宙学的限制精度。为了满足这些巡天的精度需求, 必须在 $k \leq 0.2 - 0.5h/\text{Mpc}$ 的尺度上把对 b_v 的理解限制在 0.1% – 1% 的精度上。

由于暗晕是物质场中高度非线性的一类结构, 我们必须借助高精度宇宙学模拟精确计算暗晕的速度统计量。目前最先进的数值模拟已经可以可靠地模拟宇宙学巡天中目标星系宿主暗晕的形成及演化, 并精确的生成暗晕的相空间分布 (位置及速度) 信息。但是, 由于采样偏差的存在, 从暗晕的相空间信息转换为其体积权重的速度统计量极其复杂与困难^①。采样偏差普遍存在于星系、暗晕及数值模拟中的模拟粒子中。一种证明其存在的方式是通过随机选取这些对象的某一组分 f_{sub} , 然后测量这个子样本的速度功率谱。如果不存在采样偏差, 则测量结果应当与选取组分 f_{sub} 的大小无关。但是, 无论是理论计算还是数值模拟中的结果, 都显示出这两者之间有显著的依赖关系。因此, 必然存在采样偏差^[138-139]。采样偏差的产生源于我们只知道星系、暗晕及模拟粒子这些对象所处位置的速度信息。这些对象的分布不仅不均匀, 而且其分布位置还与速度场相互关联。所以, 速度场的采样产生的偏袒, 进一步导致体积权重速度统计量的测量也存在偏袒^[138-145]。

数值模拟中暗物质粒子的速度统计本质上取决于质量分辨率。如果在某体积 L^3 中存在 $\gg 10$ 个模拟粒子, 那么速度场在 $> L$ 的尺度上近似被认为可以精确采样, 采样偏差可忽略。提高质量分辨率可以提高模拟粒子的数密度, 从而使小尺度上的测量更加可靠。不幸的是, 对暗晕来说, 采样偏差无法通过提高质量

① 不同于密度权重速度统计量, 体积权重不依赖于星系的密度偏袒因子。很多红移畸变理论模型需要计算体积权重速度统计量, 如 Scoccimarro^[65], Taruya et al.^[66], Kaiser^[79], Zhang et al.^[87]。而密度权重主要应用在密度分布函数这类方法中 (如 Seljak et al.^[71], Okumura et al.^[72]), 以及流模型中 (如 Peebles^[76], White et al.^[137])。

分辨率进行消除。首先，暗晕的分布远比模拟的物质粒子稀疏，因此采样偏差的问题更加严重。其次，暗晕的数密度在给定红移及质量时是固定的，不受模拟粒子数密度的影响。一般的计算方法很难克服采样偏差的影响，因此无法通过数值模拟精确测量暗晕的速度偏袒。

我们尝试过多种途径，试图解决体积权重的速度统计问题。例如，设计新的速度赋值方法，包括 NP 方法^[144]和 Kriging 方法^[146-147]；Zhang et al. [138]建立了关于采样偏差的理论模型，随后，Zheng et al. [139]在数值模拟中进行了验证，Zheng et al. [148]应用这个模型修正了暗晕速度场中的采样偏差。尽管上述列举了多种尝试，但是依然没有能在 $k = 0.1h/\text{Mpc}$ 时将 b_v 限制在 1% 的精度内。更不用说在更大的 k 上，此时 b_v 的测量会变得更加困难。

本工作提出了一种利用数值模拟精确测量速度偏袒 b_v 的方法。我们通过结合直接测量量与理论推导的新方法，巧妙的避开了采样偏差的问题，第一次在 $k \leq 0.4h/\text{Mpc}$ 和红移 $0 < z < 2$ 的范围内，将 $b_v(k, z)$ 限制在了 0.1% – 1%。

3.2 测量方法

我们的测量方法分为两步：计算直接测量量和理论推导。

- 直接测量包含三个，且都不包含采样偏差。(1) 暗晕的动量场 $\mathbf{p}_h \equiv (1 + \delta_h)\mathbf{v}_h$ 。这是一个密度权重统计量，没有采样偏差。(2) 暗晕的密度扰动场 $\delta_h(\mathbf{x})$ 。(3) 物质的速度场 $\mathbf{v}_m$ 。原则上，该项存在采样偏差。幸运的是，在我们使用的高精度数值模拟中，采样偏差可以被忽略。我们使用的数值模拟的数密度在 $2.4\text{Mpc}/h^3$ 的体积中平均存在 216 个暗物质粒子。对于如此致密的样本，暗物质速度功率谱中的采样偏差的估计值为 $0.02\% \times (k/(0.1h/\text{Mpc}))^2$ (Zhang et al. [138] 中公式 16 及 24)。在测量速度偏袒 b_v 时造成的系统误差为 $0.01\% \times (k/(0.1h/\text{Mpc}))^2$ ，因此完全可以被忽略。
- 这些直接测量量与体积权重速度统计存在确切的理论关系，其中的唯一未知量即为速度偏袒 $b_v(k)$ 。于是，我们可以对 b_v 进行求解，从而得到没有采样偏差的结果。

第一步，构建如下关联函数

$$\xi_{(1+\delta_h)v_h v_m}(r) \equiv \langle (1 + \delta_h(\mathbf{x}_1))\mathbf{v}_h(\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{v}_m(\mathbf{x}_2) \rangle, \quad (3-2)$$

以及该关联函数对应的功率谱 $P_{(1+\delta_h)v_h v_m}(k)$ 。该关联函数可以进一步写为

$$\xi_{(1+\delta_h)v_h v_m}(r) = \langle \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{v}_m \rangle + \langle \delta_h \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{v}_m \rangle, \quad (3-3)$$

对应的功率谱可以写为

$$P_{(1+\delta_h)v_h v_m}(k) = P_{v_h v_m}(k) + B_{\delta_h v_h v_m}. \quad (3-4)$$

这里 $\langle \dots \rangle$ 指代体积权重系综平均。

第二步，通过公式3-4求解速度偏袒 $b_v(k)$ 。这里速度偏袒的定义为

$$b_v(k) \equiv \frac{P_{v_h v_m}(k)}{P_{v_m v_m}(k)}. \quad (3-5)$$

需要再次强调， b_v 是公式3-4中唯一的未知量，证明及 b_v 的求解过程将在 §3.2.2 中给出。因为等式两边的统计量全部来自同一个数值模拟的计算，所以求得的 b_v 也不存在 cosmic variance。

3.2.1 数值模拟

我们从 CosmicGrowth 系列中选取了粒子数目为 3072³，盒子大小为 $L_{\text{box}} = 1200 \text{ Mpc}/h$ 的一组数值模拟（参见表格1-5中 WMAP_3072_1200）。该模拟采用了 WMAP Λ CDM 宇宙学参数（参见表格1-4中 WMAP）。我们将该数值模拟记为 J6620。暗晕通过 Friends-of-Friends(FoF) 算法寻找，链的长度为 $b = 0.2$ 倍粒子平均间隔距离。之后从中剔除所有未束缚粒子，最后得到暗晕数据集。暗晕中心定义为质量中心，暗晕速度定义为暗晕中所有包含粒子的平均速度。我们选取了若干组不同质量，不同红移 $z \approx 0, 0.5, 1, 1.5$ 处的暗晕，测量了它们的速度偏袒。表格3-1列出了这些分组的详细参数。

暗晕和暗物质的密度场与动量场通过 NGP 方法构建，即 $(1+\delta_h)\mathbf{v}_h = \sum_i \mathbf{v}_h^i / \bar{n}$ 。 $\sum_i$ 代表对所有指定单元格内的粒子进行求和。 $\bar{n}$ 是所有单元格内暗晕的平均数目。计算这些场时，我们采用了 512³ 个格点。此时每个格子的大小为 $L_{\text{grid}} = 2.4 \text{ Mpc}/h$ 。每个格子平均包含 216 个模拟粒子。因此在 $> L_{\text{grid}}$ 的尺度上，可以对暗物质速度场做到很好的采样。此时，体积权重暗物质速度场 $\mathbf{v}_m = \sum_i \mathbf{v}_m^i / \sum_i$ ，且采样偏差可以忽略。此外，由于我们关心的尺度 $k \lesssim 0.4 h/\text{Mpc}$ 远远小于奈奎斯特尺度 (Nyquist wavenumber) $k_N = \pi/L_{\text{grid}} = 1.31 h/\text{Mpc}$ ，因此，锯齿效应 (aliasing effect) 同样也可以忽略^[149]。

图3-1展示了红移 $z = 0$ 时对两组不同质量暗晕， $M > 10^{13} M_\odot/h$ (虚线) 及 $10^{12} M_\odot/h < M < 10^{13} M_\odot/h$ (点线)， $P_{(1+\delta_h)v_h v_m}$ 的测量结果。作为对比，这里也展示了 $P_{(1+\delta_m)v_m v_m}$ 。在 $k \gtrsim 0.2 h/\text{Mpc}$ 时，三条线几乎重合。对这些项的贡献主要来自两个部分：第一部分为 $\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rangle$ ，在 $k \lesssim 0.3 h/\text{Mpc}$ 时，该部分起主导作用；第二部分为 $\langle \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rangle$ ，在 $k \gtrsim 0.2 h/\text{Mpc}$ 时，该部分会显著增加，并且在 $k \gtrsim 0.3 h/\text{Mpc}$ 时变为主导项。这些结果已经预示着在大尺度 $k \lesssim 0.1 h/\text{Mpc}$ 时，速度偏袒 $b_v \approx 1$ 。

Set ID	mass range	$\langle M \rangle$	$N_h/10^5$	$b_h(k < 0.1h/\text{Mpc})$
A1($z = 0.0$)	> 10	37.7	7.1	1.36
$z = 0.5$	> 10	29.8	5.5	1.89
$z = 1.0$	> 10	23.7	3.5	2.68
$z = 2.0$	> 10	17.7	0.88	4.98
A2($z = 0.0$)	1-10	2.7	54.4	0.81
$z = 0.5$	1-10	2.6	52.5	1.04
$z = 1.0$	1-10	2.5	46.9	1.48
$z = 2.0$	1-10	2.3	28.6	2.64
A3($z = 0.0$)	0.5-1	0.70	52.9	0.70
$z = 0.5$	0.5-1	0.70	54.0	0.86
$z = 1.0$	0.5-1	0.69	52.4	1.15
$z = 2.0$	0.5-1	0.69	39.7	1.97
$z = 3.0$	0.5-1	0.68	21.8	3.15
B1($z = 0.0$)	0.5-1	0.70	52.9	0.70
B2($z = 0.0$)	1-7	2.4	51.5	0.80
B3($z = 0.0$)	7-10	8.2	3.3	1.02
B4($z = 0.0$)	> 10	37.7	7.1	1.36
C1($z = 0.0$)	7-10	8.2	3.3	1.02
C2($z = 0.5$)	1.2-4.0	2.1	34.1	1.02
C3($z = 1.0$)	0.31-0.35	0.33	20.3	1.01

表 3-1 J6620 中五组不同质量暗晕的相关参数, 质量单位为 $10^{12}M_\odot/h$ 。 $\langle M \rangle$ 为平均暗晕质量。 N_h 为该组中暗晕数目。 b_h 为 $k < 0.1h/\text{Mpc}$ 时暗晕密度偏袒。

Table 3-1 Five sets of halo mass bins. The mass unit is $10^{12}M_\odot/h$. $\langle M \rangle$ is the mean halo mass. N_h is the total number of halos in the corresponding mass bin. b_h is the halo density bias at $k < 0.1h/\text{Mpc}$.

3.2.2 尺度依赖的速度偏袒求解方法

在傅立叶空间中, 可以对暗晕速度作如下分解, $\mathbf{v}_h(\mathbf{k}) = b_v(\mathbf{k})\mathbf{v}_m(\mathbf{k}) + \mathbf{v}_h^S(\mathbf{k})$ 。其中, 第一项与密度场相关联。而第二项 $\mathbf{v}_h^S(\mathbf{k})$ 是暗晕速度场的随机成分, 与密度场在两点统计上无关, 即 $\langle \mathbf{v}^S(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{v}_m^*(\mathbf{k}) \rangle = 0$, $\langle \mathbf{v}^S(\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{v}_m^*(\mathbf{x}_2) \rangle = 0$ 。可以证明, 由上式能推导出公式3-5中定义的速度偏袒形式。这种速度分解的方式是唯一且确定的。显然, $\mathbf{v}_h^S$ 对 $P_{v_h v_m}$ 没有贡献。另外, $\mathbf{v}_h^S$ 对 $B_{\delta_h \delta_h v_m}$ 也没有贡献。由于宇宙大尺度结构在统计上的各向同性, $\hat{\mathbf{v}}_h^S(\mathbf{x}_1)$ 的取向与 $\delta_h(\mathbf{x}_1)$ 没有关联。这一点保证了暗晕密度偏袒的尺度依赖性和非定域性, 否则统计上的各向同性将被破坏。根据定义, $\hat{\mathbf{v}}_h^S(\mathbf{x}_1)$ 的取向也与 $\mathbf{v}_m(\mathbf{x}_2)$ 无关。对各个方向的平均将使得 $\langle \delta_h(\mathbf{x}_1) \hat{\mathbf{v}}_h^S(\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{v}_m(\mathbf{x}_2) \rangle_{\hat{\mathbf{v}}_h^S} = 0$ 。

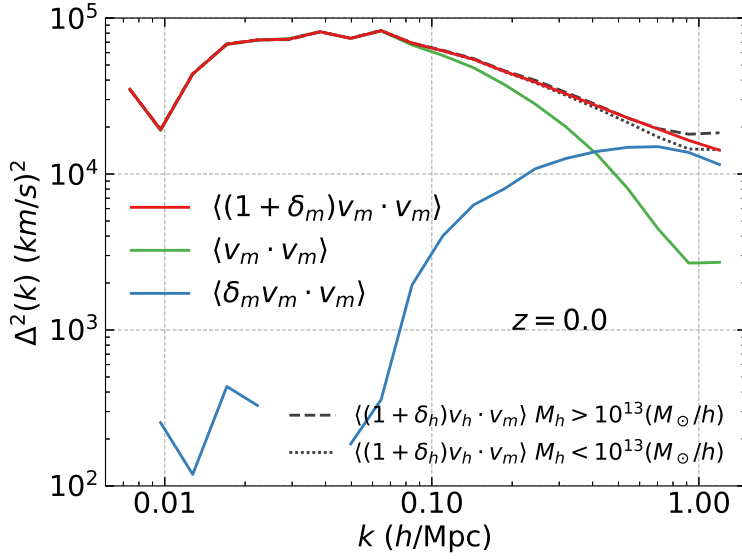


图 3-1 $z = 0$ 时的功率谱 $\Delta_\alpha^2 \equiv k^3 P_\alpha(k)/2\pi^2$, 单位为 $(\text{km/s})^2$, 其中, $\alpha = (1 + \delta_m)v_m v_m$, $(1 + \delta_h)v_h v_m$, $\delta_m v_m v_m$ 。所有测量中的速度场都不存在采样偏差。在 $k < 0.3h/\text{Mpc}$ 时, $P_{(1+\delta_m)v_m v_m}$ 由 $P_{v_m v_m}$ 主导。这一性质使得测量 b_v 变得更加容易。

Figure 3-1 The $z = 0$ power spectrum variance $\Delta_\alpha^2 \equiv k^3 P_\alpha(k)/2\pi^2$ in unit of $(\text{km/s})^2$, where $\alpha = (1 + \delta_m)v_m v_m$, $(1 + \delta_h)v_h v_m$, $v_m v_m$, $\delta_m v_m v_m$. All these measurements are essentially free of the sampling artifact in the velocity field. At $k < 0.3h/\text{Mpc}$, $P_{(1+\delta_m)v_m v_m}$ is dominated by $P_{v_m v_m}$. This property makes the measurement of b_v easier.

综上, $\mathbf{v}_h^S$ 对于公式3-4的右侧没有贡献。 $\delta_h(\mathbf{x})$ 与 $\mathbf{v}_m(\mathbf{x})$ 可以从相同的数值模拟求得, 因此 $b_v(k)$ 是公式3-4等号右侧中唯一的未知量。

在求解 $b_v(k)$ 时, 唯一的难点来自于公式3-4右侧对 $b_v(k)$ 的依赖是非定域的。原因是 $b_v(k' \neq k)$ 对 $B_{\delta_h v_h v_m}(k)$ 也有贡献。这里, 我们采用极大似然估计求解 $b_v(k)$ 。

我们将 k 分为若干区间, 其中心值为 k_α , 区间宽度为 $\Delta k_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots)$ 。则有 $b_v(k) = \sum_\alpha b_\alpha W_\alpha(k)$ 。其中, 当 $k_\alpha - \Delta k_\alpha/2 < k \leq k_\alpha + \Delta k_\alpha/2$ 时, $W_\alpha(k) = 1$, 否则 $W_\alpha(k) = 0$ 。 b_α 是 b_v 在区间 $k_\alpha - \Delta k_\alpha/2 < k \leq k_\alpha + \Delta k_\alpha/2$ 内的平均值。功率谱 $B_{\delta_h v_h v_m}(\mathbf{k}) = \sum_\alpha b_\alpha B_\alpha(\mathbf{k})$ 。这里 $B_\alpha(\mathbf{k})$ 是将 $B_{\delta_h v_h v_m}(\mathbf{k})$ 中的 $\mathbf{v}_h(\mathbf{k}')$ 替换为 $\mathbf{v}_m(\mathbf{k}')W_\alpha(k')$ 后得到的值。 $B_\alpha(\mathbf{k})$ 可以通过一系列快速傅立叶变换 (FFT) 得到。首先, $\mathbf{v}_m(\mathbf{k})$ 可由 $\mathbf{v}_m(\mathbf{x})$ 经过 FFT 得到。然后, 我们对 $\mathbf{v}_m(\mathbf{k})W_\alpha(k)$ 做逆傅立叶变换, 将结果记为 $\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{x})$ 。最后, 对 $\delta_h(\mathbf{x})\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{x})$ 做 FFT, 再乘以 $\mathbf{v}_m^*(\mathbf{k})$ 后得到 $B_\alpha(\mathbf{k})$ 。最

终需要计算的功率谱可以写为

$$\hat{P}_{(1+\delta_h)v_h v_m}(\mathbf{k}) = \sum_{\alpha} b_{\alpha} (W_{\alpha}(k) P_{v_m v_m}(\mathbf{k}) + B_{\alpha}(\mathbf{k})) = \sum_{\alpha} b_{\alpha} S_{\alpha}(\mathbf{k}), \quad (3-6)$$

$$S_{\alpha}(\mathbf{k}) \equiv W_{\alpha}(k) P_{v_m v_m}(\mathbf{k}) + B_{\alpha}(\mathbf{k}). \quad (3-7)$$

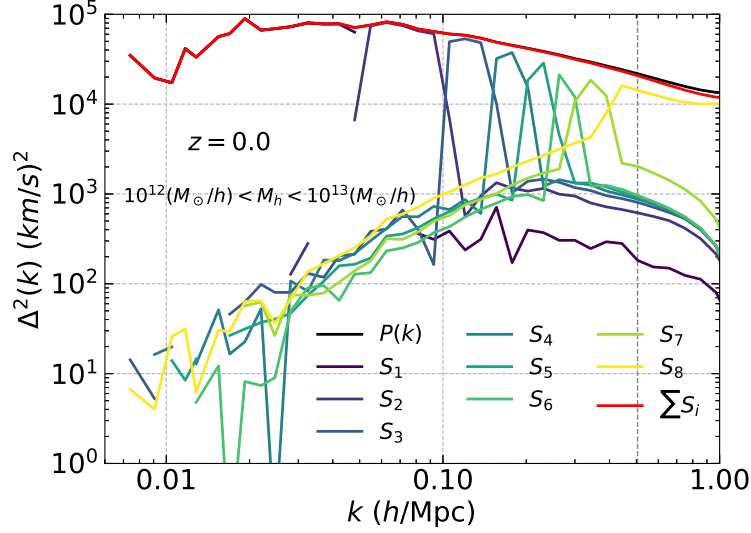


图 3-2 公式3-7中定义的 $S_{\alpha}(k)$ ($\alpha = 1, 2, \dots$), 和 $\sum S_{\alpha}$ 以及 $P_{(1+\delta_h)v_h v_m}(k)$ 。为了方便, 我们这里只展示了暗晕质量为 $10^{12} < M/(M_{\odot}/h) < 10^{13}$ 的结果。如果暗晕速度偏袒为 1, 那么 $\sum S_{\alpha} = P_{(1+\delta_h)v_h v_m}(k)$ 。图中二者微弱的偏差 (特别是在 k 值较小时) 预示着暗晕对应的速度偏袒非常接近, 但不等于 1。这里我们只使用 $k < 0.5 h/\text{Mpc}$ 的数据对 b_v 进行拟合。

Figure 3-2 $S_{\alpha}(k)$ ($\alpha = 1, 2, \dots$) defined in Eq. 3-7, the sum $\sum S_{\alpha}$, and $P_{(1+\delta_h)v_h v_m}(k)$ of halos. For brevity, we only show the case of halos in the mass range $10^{12} < M/(M_{\odot}/h) < 10^{13}$ and at $z = 0$. If the halo velocity bias equals unity, $\sum S_{\alpha} = P_{(1+\delta_h)v_h v_m}(k)$. Slight difference between $\sum S_{\alpha}$ and $P_{(1+\delta_h)v_h v_m}(k)$ (in particular at high k) implies that the velocity bias of corresponding halos is close to, but not exactly, unity. We only use the measurement at $k < 0.5 h/\text{Mpc}$ for fitting b_v .

图3-2展示了暗晕质量为 $10^{12} < M/(M_{\odot}/h) < 10^{13}$ 的 S_{α} 。对于较小的 α (k_{α}), S_{α} 由第一项主导, 并且在 k 空间趋近阶跃函数。但是随着 k 的增大, 来自 B_{α} 的贡献变得逐渐不可忽略。在范围 $[k_{\alpha} - \Delta k_{\alpha}/2, k_{\alpha} + \Delta k_{\alpha}/2]$ 之外的值逐渐增长。

需要再次说明, $P_{v_m v_m}(\mathbf{k})$ 和 $B_{\alpha}(\mathbf{k})$ 均来自同一数值模拟的测量, 唯一一组未知量为 b_{α} 。等式两边来自相同的数值模拟, 因此求得的 b_{α} 不存在 cosmic variance。因此, 可以直接写出似然函数 $\mathcal{L} \propto \exp(-\chi^2/2)$ 。其中,

$$\chi^2 = \sum_{\mathbf{k}} \frac{(P_{(1+\delta_h)v_h v_m}(\mathbf{k}) - \hat{P}_{(1+\delta_h)v_h v_m}(\mathbf{k}))^2}{\sigma_{\mathbf{k}}^2}. \quad (3-8)$$

$\sigma_{\mathbf{k}}$ 是由于暗晕数量有限造成的 $P_{(1+\delta_h)v_h v_m}(\mathbf{k})$ 的方均根扰动。我们将暗晕随机分为 8 组互无交集的子样本，计算这些子样本间的离散度，然后除以 $\sqrt{8}$ ，进而得到 $\sigma_{\mathbf{k}}$ 。因为 shot noise 的来源不同，不同 $\mathbf{k}$ 之间的误差没有关联。

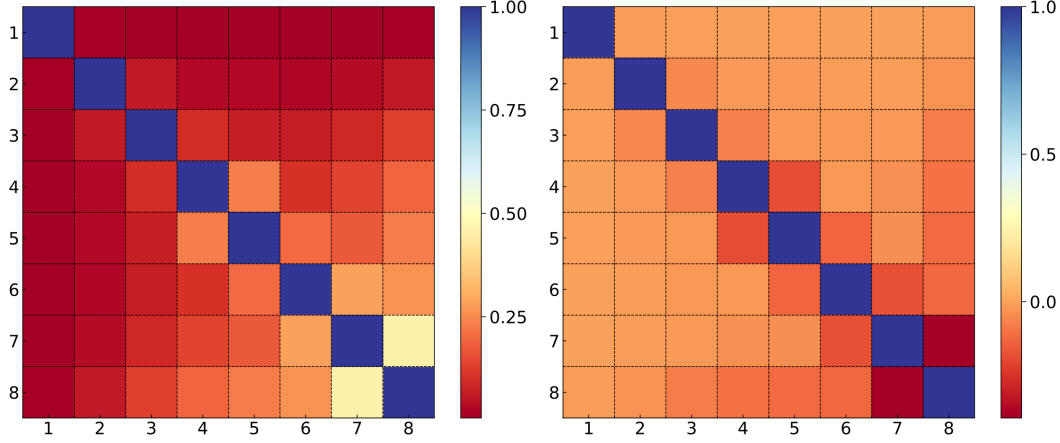


图 3-3 左图展示了公式3-11中归一化的 $\mathbf{F}_{\alpha\beta}/\sqrt{\mathbf{F}_{\alpha\alpha}\mathbf{F}_{\beta\beta}}$ 。因为 S_{α} 与 $S_{\beta\neq\alpha}$ 在 k 空间有重叠，所以 $F_{\alpha\beta}$ 的非对角元不为 0。右图展示了公式3-14中归一化的 $\mathbf{E}_{\alpha\beta}/\sqrt{\mathbf{E}_{\alpha\alpha}\mathbf{E}_{\beta\beta}}$ 。 $S_{\alpha\neq\beta}$ 各对间的重叠导致 $\mathbf{F}_{\alpha\neq\beta} \neq 0$ (左图)，进而使得 $\mathbf{E}_{\alpha\neq\beta} \neq 0$ (右图)。这造成了求得的 $b_{1,2,\dots}$ 间的误差产生关联。这也是部分导致 k 增大时统计误差也增大的原因。

Figure 3-3 The left panel shows the normalized matrix $\mathbf{F}_{\alpha\beta}/\sqrt{\mathbf{F}_{\alpha\alpha}\mathbf{F}_{\beta\beta}}$ of Eq. 3-11. Due to overlap of S_{α} and $S_{\beta\neq\alpha}$ in the k space, $F_{\alpha\beta}$ has non-vanishing off-diagonal elements. The right panel shows the normalized error matrix $\mathbf{E}_{\alpha\beta}/\sqrt{\mathbf{E}_{\alpha\alpha}\mathbf{E}_{\beta\beta}}$ in Eq. 3-14. Overlaps between pairs of $S_{\alpha\neq\beta}$ in the k space (the left panel) cause $\mathbf{F}_{\alpha\neq\beta} \neq 0$ (the middle panel), which leads to $\mathbf{E}_{\alpha\neq\beta} \neq 0$ (the right panel).

This results into correlated error in the determined $b_{1,2,\dots}$. It is also partly responsible for the increasing statistical error in the determined b_v with increasing k .

因为 $\hat{P}_{(1+\delta_h)v_h v_m}$ 是 b_{α} 的线性函数，且似然函数 $\mathcal{L}$ 是 b_{α} 的多变量高斯方程，因此， b_{α} 的最佳拟合值可以通过线性方程直接求解。

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial b_{\alpha}} = 0 \Rightarrow \sum_{\beta} b_{\beta} \left[\sum_{\mathbf{k}} \frac{S_{\alpha}(\mathbf{k}) S_{\beta}(\mathbf{k})}{\sigma_{\mathbf{k}}^2} \right] \quad (3-9)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} \frac{P_{(1+\delta_h)v_h v_m}(\mathbf{k}) S_{\alpha}(\mathbf{k})}{\sigma_{\mathbf{k}}^2}. \quad (3-10)$$

通过上式解得最佳拟合值：

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{D}, \quad (3-11)$$

$$\text{其中, } \mathbf{F}_{\alpha\beta} \equiv \sum_{\mathbf{k}} \frac{S_{\alpha}(\mathbf{k}) S_{\beta}(\mathbf{k})}{\sigma_{\mathbf{k}}^2} \quad (3-12)$$

$$\mathbf{D}_{\alpha} \equiv \sum_{\mathbf{k}} \frac{P_{(1+\delta_h)v_h v_m}(\mathbf{k}) S_{\alpha}(\mathbf{k})}{\sigma_{\mathbf{k}}^2}. \quad (3-13)$$

协方差矩阵 $\mathbf{E}_{\alpha\beta} \equiv \langle \delta b_{\alpha} \delta b_{\beta} \rangle$ 由下式给出：

$$\mathbf{E}_{\alpha\beta} = (\mathbf{F}^{-1})_{\alpha\beta}. \quad (3-14)$$

矩阵 $\mathbf{F}$ 与 $\mathbf{E}$ 见图3-3。

3.3 计算结果及分析

我们在以下若干个 k 区间内, $(0, 0.05)$, $(0.05, 0.1)$, $(0.1, 0.15)$, $(0.15, 0.20)$, $(0.20, 0.25)$, $(0.25, 0.3)$, $(0.3, 0.4)$, $(0.4, \infty)$, 计算了 $b_v(k)$ 的最佳拟合值及其误差。如上文所述, 因为测量的暗晕及暗物质场均来自同一数值模拟, 因此求得的 b_v 不包含 cosmic variance。唯一的噪声源来自暗晕分布的 shot noise。大量的暗晕样本 ($\sim 10^5 - 7$) 得以让我们在 $0.1\% - 1\%$ 的统计误差范围内确定 $b_v(k \lesssim 0.4h/\text{Mpc})$, 同时有能力检测到 b_v 任何显著偏离 1 的行为。

图3-4-3-6展示了三组不同质量暗晕, A1, A2, A3 的速度偏袒对红移的依赖。图3-7展示了速度偏袒在 $z = 0$ 时对暗晕质量的依赖。另外, 表3-2列出了不同 k 的区间范围内速度偏袒的测量值。

我们发现, $k \geq 0.1h/\text{Mpc}$ 时, b_v 在统计上会显著的偏离 1。这使得在本动速度宇宙学中通常采用的 $b_v = 1$ 的假设不再适用。这个结论对第四代暗能量巡天红移畸变宇宙学有着重要的影响。此外, 我们还发现 k , 暗晕质量 M 以及红移 z 都对 $b_v - 1$ 有显著的影响。这些结果也与 peak model 的预言存在巨大差异, 为暗晕的本动速度理论带来了新的问题。我们的主要发现将在下面进行详细讨论。

3.3.1 对 k 的依赖

首先, $b_v(k) - 1$ 既可以为正, 也可以为负。这是对 peak model 的第一个挑战, peak model 对该值的预言恒为负数。另外, $b_v(k) - 1$ 的符号不随 k 改变, 且 $|b_v(k) - 1|$ 随着 k 的增大而增大, 粗略呈现出 $b_v(k) \propto k^2$ 的关系。(1) 在 $k \leq 0.1h/\text{Mpc}$ 时, 该偏离非常微弱。对我们的计算中所涵盖的所有质量暗晕和红移,

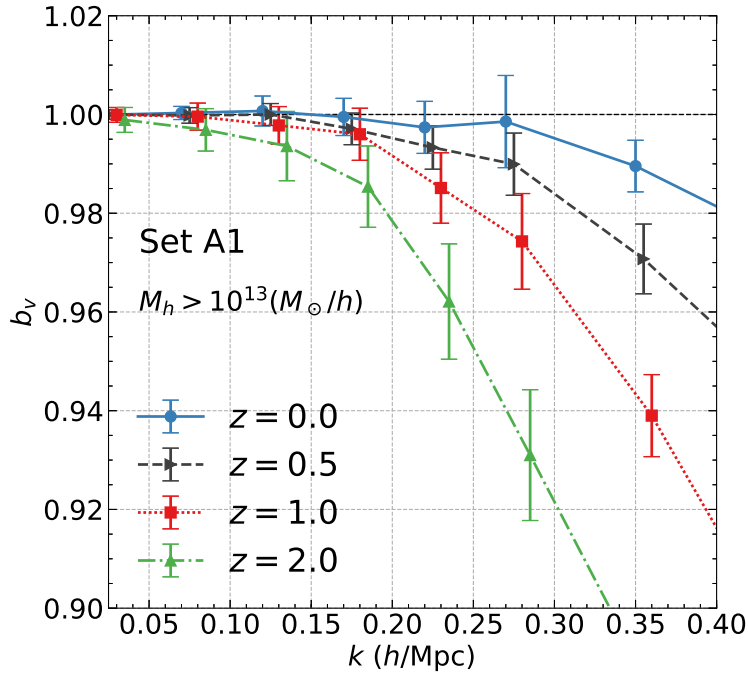


图 3-4 A1 组暗晕 ($M > 10^{13} M_{\odot}/h$) 的速度偏袒, 红移分别为 $z = 0, 0.5, 1.0, 2.0$ 。速度偏袒随红移的增加而减小, 且所有红移都有 $b_v < 1$ 。这里为了将结果展示的更加清楚, 我们对 $z > 0$ 的结果做了微小的横向移动。这一结果使得在本动速度宇宙学中速度偏袒为 1 的假设不再适用。 $|b_v - 1|$ 远小于 peak model 的预言。并且结果也显示了速度偏袒与红移演化存在很强的相关性, 这也与 peak model 的预言矛盾。

Figure 3-4 The velocity bias of halo set A1 ($M > 10^{13} M_{\odot}/h$) at $z = 0, 0.5, 1.0, 2.0$. The velocity bias decreases with increasing redshift. For these halos, $b_v < 1$ at all redshifts. Notice that for clarity we shift the $z > 0$ data points horizontally. The result invalidates the usual assumption of $b_v = 1$ in peculiar velocity cosmology. $|b_v - 1|$ is much weaker than the peak model prediction. It also shows significant redshift evolution, in contrast to the peak model prediction.

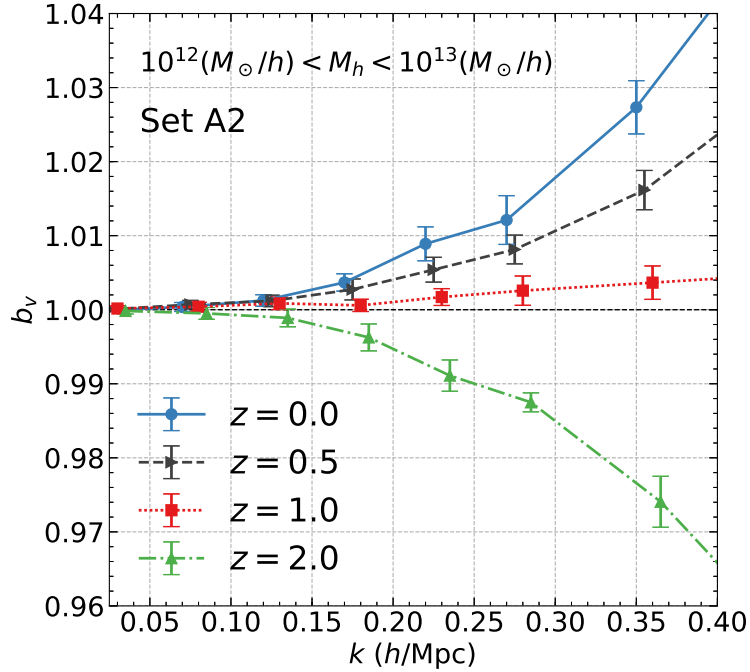


图 3-5 与图3-4相似，但此处为 A2 组暗晕 ($10^{12} < M/(M_{\odot}/h) < 10^{13}$) 的结果。需要指出，此时 $b_v - 1$ 的值随着红移的增加，从 $z=0$ 到 $z=2$ ，其符号由正转负。

Figure 3-5 Similar to Fig 3-4, but for halo set A2 ($10^{12} < M/(M_{\odot}/h) < 10^{13}$). Notice that $b_v - 1$ changes from positive sign to negative sign from $z=0$ to $z=2$.

偏离都小于 $\sim 0.3\%$ ，并不显著。 $|b_v(k) - 1|$ 的值比 peak model 对原初暗晕的预言小几个数量级。这意味着我们不能简单的将对原初暗晕速度的预言推广到真实暗晕上。(2) 在 $0.1 \leq k \leq 0.2h/\text{Mpc}$ 时， b_v 开始出现显著的偏离 1 的行为。依赖于暗晕的质量，该偏离可以达到 1%。下文将会进一步讨论尽管这个偏离相对较弱，但仍然会对第四代暗能量巡天 DESI 的红移畸变宇宙学造成显著的系统误差。(3) 在 $0.2 \leq k \leq 0.4h/\text{Mpc}$ 时，一些暗晕会出现 $b_v - 1$ 在 $\mathcal{O}(10\%)$ 的偏离。红移畸变宇宙学的一个重要科学目标是在非线性尺度 $k \leq 0.5h/\text{Mpc}$ 提取宇宙学信息 (见 Dodelson et al.^[136])。该尺度上，速度偏袒对 1 的显著偏差是对这个科学目标的一个重大挑战。

3.3.2 对暗晕质量及红移的依赖

b_v 随红移的升高 (图3-4-3-5) 及暗晕质量的降低 (图3-7) 而增大。这导致 $b_v - 1$ 的符号依赖于红移及暗晕质量。例如，对于 $M > 10^{13}M_{\odot}/h$ 的暗晕， $b_v - 1$ 恒为负 (图3-4)。但是对于更轻质量的暗晕 (图3-5及3-6)，当红移由 $z=0$ 升高至

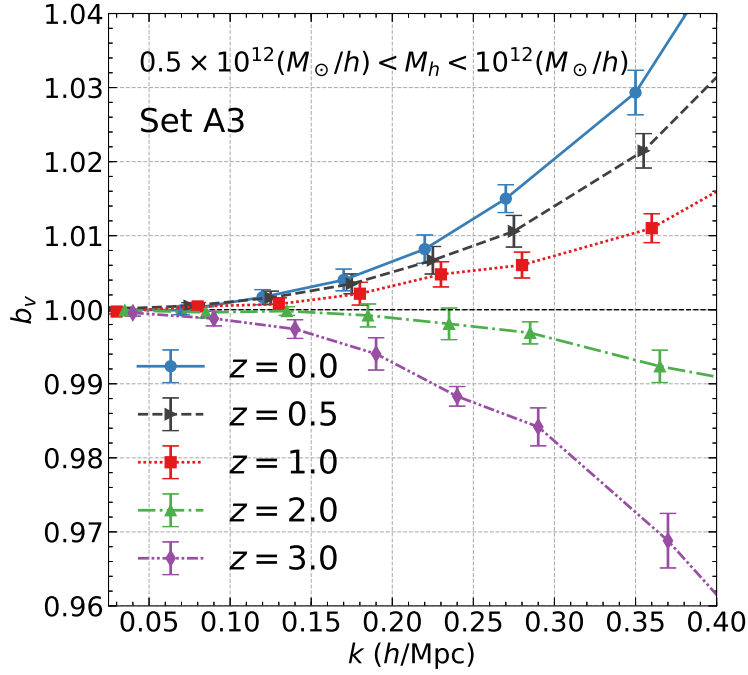


图 3-6 与图3-4相似，但此处为 A3 组暗晕 ($5 \times 10^{11} < M/(M_{\odot}/h) < 10^{12}$) 的结果。 $b_v - 1$ 的值随着红移的增加其符号也由正转负。

Figure 3-6 Similar to Fig. 3-4, but for set A3 ($5 \times 10^{11} < M/(M_{\odot}/h) < 10^{12}$). Again, $b_v - 1$ changes sign with redshift.

$z = 2$ 时, $b_v - 1$ 从正数变为负数。另一个结果是 $b_v - 1$ 的大小对暗晕质量及红移存在很强的依赖性。例如, 对于 $M > 10^{13} M_{\odot}/h$ 的暗晕, 在 $0.25 < k < 0.3 h/\text{Mpc}$ 以及 $z = 1(2)$ 时, $b_v - 1 = -0.026(-0.069)$ 。但是对于质量 $10^{12} < M < 10^{13} M_{\odot}/h$ 的暗晕, 在 $z = 1$ 时, $b_v - 1 \sim 0.3\%$ 。图3-7比较了 $z = 0$ 时不同质量暗晕的 b_v 。此时, 质量最小的暗晕产生的偏离量最大。

为了阐释上述结果对本动速度宇宙学的影响, 因为不同的巡天所测得的星系所处暗晕及红移有所差异, 因此我们需要针对不同的星系巡天分别进行说明。这里, 我们只是定性的展示各种红移巡天可能观测到的对应暗晕大小。后面我们会定量的指出速度偏袒对一些红移巡天产生的影响。(1) $10^{13} M_{\odot}/h$ 质量的暗晕在 $z < 1$ 时对应可能被 DESI 观测到的亮红星系 (LRG)^[116,150]。TAIPAN 红移及本动速度巡天所观测到的星系也有可能落在这些暗晕内, 但其红移为 $z = 0$ ^[127]。(2) 对更小的暗晕 ($< 10^{13} M_{\odot}/h$), 21 厘米巡天可能有能力侦测到它们。鉴于其对 HI(中性氢) 质量的灵敏度, SKA 可以探测到百亿级别的, 处在此类暗晕中的 21 厘米发射线星系^[151-152], 并且从观测上限制 HI 质量与暗晕质量的关系^[153]。SKA 还可以间接的通过强度谱对它们进行探测。(3) 对质量最小的一组暗晕 $< 10^{12} M_{\odot}/h$, 诸如 DESI 及

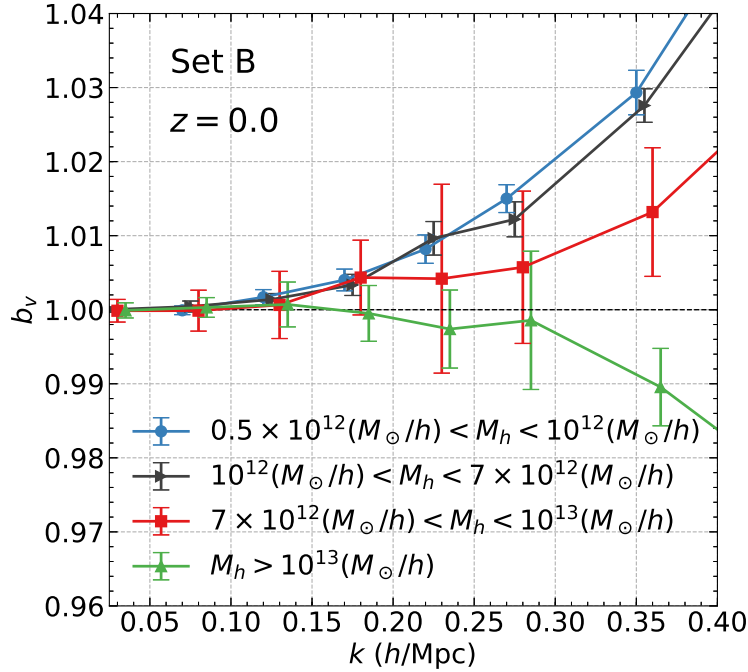


图 3-7 速度偏袒 b_v 对暗晕质量的依赖 (表3-1中 B 组暗晕, 红移皆为 $z = 0$)。为了将结果展示的更加清楚, 我们对三个高质量暗晕的结果做了微小的横向移动。 $b_v - 1$ 的符号不仅会随红移改变, 也依赖暗晕质量。

Figure 3-7 The dependence of halo velocity bias on halo mass (halo set B at $z = 0$). For clarity, we shift the results of the three higher mass bins horizontally. The sign of $b_v - 1$ not only changes with redshift, but also with mass.

PFS 所探测的发射线星系 (ELG) 中, 很大一部分会处在这类暗晕中^[154-155]。DESI 可以在 $0.6 \leq z \leq 1.6$ 的条件下探测到它们, 而 PFS 探测的红移更高 $z \leq 2.4$ 。另外, 21 厘米强度谱巡天, 如 CHIME^[156]及天籁^[157], 虽然不能探测到单独星系, 但是对这些暗晕也有一定敏感度。

3.3.3 对暗晕密度偏袒的依赖

一个有趣的发现是, 速度偏袒对暗晕质量及红移的依赖似乎可以被吸收到对暗晕密度偏袒 b_h 这单一参数的依赖。这点可以通过对比表格3-1中的 b_h 与表格3-2中相同暗晕所对应的 b_v 加以确认。更明确的结果可以参考表格3-1中的 C 组暗晕, 在不同红移处, 该组暗晕密度偏袒都近似为 1, 表格3-2展示了它们具有相似的速度偏袒。通过这一发现, 我们提出了下面的拟合公式:

$$b_v(k|M, z) \simeq 1 - [c_0 + c_1(b_h(M, z) - 1)] \tilde{k}^2. \quad (3-15)$$

Set ID	$(b_v - 1) \times 100$ $0.05 < k < 0.1$	$(b_v - 1) \times 100$ $0.15 < k < 0.2$	$(b_v - 1) \times 100$ $0.25 < k < 0.3$
A1($z = 0.0$)	0.03 ± 0.13	-0.05 ± 0.38	-0.14 ± 0.93
$z = 0.5$	-0.02 ± 0.16	-0.29 ± 0.32	-1.01 ± 0.63
$z = 1.0$	-0.04 ± 0.27	-0.40 ± 0.53	-2.57 ± 0.97
$z = 2.0$	-0.31 ± 0.43	-1.46 ± 0.82	-6.90 ± 1.32
A2($z = 0.0$)	0.04 ± 0.06	0.37 ± 0.12	1.21 ± 0.33
$z = 0.5$	0.07 ± 0.06	0.27 ± 0.14	0.81 ± 0.19
$z = 1.0$	0.04 ± 0.06	0.06 ± 0.08	0.26 ± 0.20
$z = 2.0$	-0.05 ± 0.08	-0.37 ± 0.18	-1.25 ± 0.13
A3($z = 0.0$)	-0.01 ± 0.06	0.40 ± 0.15	1.50 ± 0.19
$z = 0.5$	0.05 ± 0.04	0.35 ± 0.13	1.06 ± 0.21
$z = 1.0$	0.04 ± 0.05	0.22 ± 0.15	0.60 ± 0.17
$z = 2.0$	-0.04 ± 0.07	-0.08 ± 0.15	-0.31 ± 0.15
$z = 3.0$	-0.12 ± 0.10	-0.60 ± 0.22	-1.58 ± 0.26
B1($z = 0.0$)	-0.01 ± 0.06	0.40 ± 0.15	1.50 ± 0.19
B2($z = 0.0$)	0.04 ± 0.07	0.33 ± 0.14	1.22 ± 0.24
B3($z = 0.0$)	-0.01 ± 0.28	0.43 ± 0.50	0.57 ± 1.03
B4($z = 0.0$)	0.03 ± 0.13	-0.05 ± 0.38	-0.14 ± 0.93
C1($z = 0.0$)	-0.01 ± 0.06	0.43 ± 0.50	0.57 ± 1.03
C2($z = 0.5$)	0.06 ± 0.07	0.34 ± 0.17	0.88 ± 0.38
C3($z = 1.0$)	0.04 ± 0.07	0.29 ± 0.22	0.66 ± 0.35

表 3-2 测得的速度偏袒 b_v 。我们发现对 $k \geq 0.1h/\text{Mpc}$, b_v 在统计上显著的偏离 1。 $|b_v - 1|$ 随着 k 的增大而增大, 最后在 $k \sim 0.3h/\text{Mpc}$ 时可以达到 $\mathcal{O}(10\%)$ 。

Table 3-2 The determined velocity bias. We discover statistically significant deviation of b_v from unity at $k \geq 0.1h/\text{Mpc}$. $|b_v - 1|$ increases with k , and may reach $\mathcal{O}(10\%)$ at $k \sim 0.3h/\text{Mpc}$.

其中, $\tilde{k} \equiv k/(\text{Mpc}/h)$. 这个拟合公式实际上是 $b_v(\mathbf{k})$ 在 $(0, 0, 0)$ 处的泰勒展开。速度偏袒各向同性的性质 ($b_v(\mathbf{k}) = b_v(k)$) 使得展开项中 k 的奇次幂, 如 k_m 和 $k_m k_n k_l (m, n, l = 1, 2, 3)$, 都为 0。因此, 非 0 的领头项为 k^2 。通过拟合我们发现 $c_0 = -0.138 \pm 0.01$, $c_1 = 0.186 \pm 0.007$ (图3-8)。 c_1 拟合值的微小误差表明, 速度偏袒对 b_h 的依赖在统计上是显著的。需要注意, 这个拟合公式只是一个近似的结果, 因为它忽略了 b_h 以外的依赖关系, 并且忽略了对高阶 k , 如 k^4 等的依赖关系。尽管如此, 该公式仍然足以说明速度偏袒对暗晕性质及尺度的依赖 (图3-8)。另一点需要重视的是, 该公式暗含假设: 速度偏袒中所有对宇宙学的依赖都被隐含在 b_h 之中, 因此 $c_{0,1}$ 不依赖于宇宙学。这是由于 b_v 对 b_h 超强的依赖关系所导致的。如果合理, 我们可以进一步将该拟合公式用在其他宇宙学上, 如 Planck 2015^[7], 该

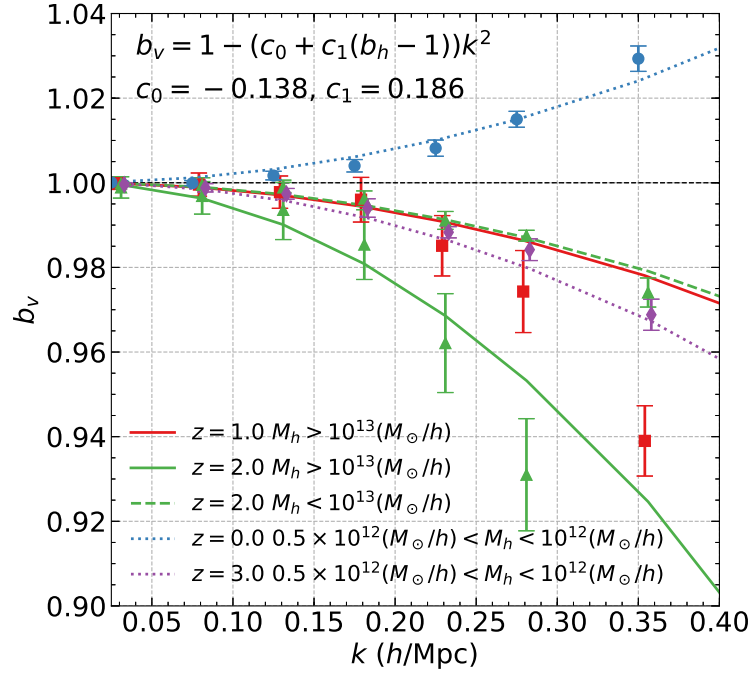


图 3-8 b_v 的拟合公式。为了让结果更清晰，我们没有展示所有暗晕的结果。残差主要来自于 b_v 对密度偏袒 b_h 以外的依赖关系。这一点需要进一步的研究。

Figure 3-8 A fitting formula of b_v . For clarity, we do not show the results of all halo sets. The residual error mainly arises from the dependence of the velocity bias b_v beyond the density bias b_h . It is an issue for further investigation.

宇宙学的 Ω_m 比文中大 13%。未来我们将使用不同宇宙学的数值模拟进一步研究这一假设。

3.4 对本动速度巡天的启示

这里我们主要讨论两点速度偏袒对宇宙学的启示。第一点是速度偏袒可能导致通过红移巡天测定的结构增长率产生系统性偏差。第二点是利用速度偏袒可以在宇宙学尺度上检验等效原理。

3.4.1 对结构增长率测量的影响

宇宙学红移巡天的一个重要任务是通过本动速度限制结构增长率。速度偏袒如果被忽略或采用了错误模型，将会变成系统误差的来源。其是否在统计上显著取决于不同巡天所观测的星系类型。低红移巡天 TAIPAN 计划测量 $\sim 10^4$ 个星系的本动速度。在 $z \sim 0$ 时，利用 $k < 0.2 h/\text{Mpc}$ 的信息，可以把 $f\sigma_8$ 限制在 $\sim 10\%$ 的精度

内^[127]。TAIPAIN 的目标星系对应的暗晕质量为 $M \sim 10^{13} M_{\odot}/h$ ，在 $k < 0.2 h/\text{Mpc}$ 时， $|b_v - 1| \ll 1\%$ (见图3-4及表3-2)。因此，速度偏袒产生的系统误差可以被忽略，传统假设 $b_v = 1$ 可以继续沿用。

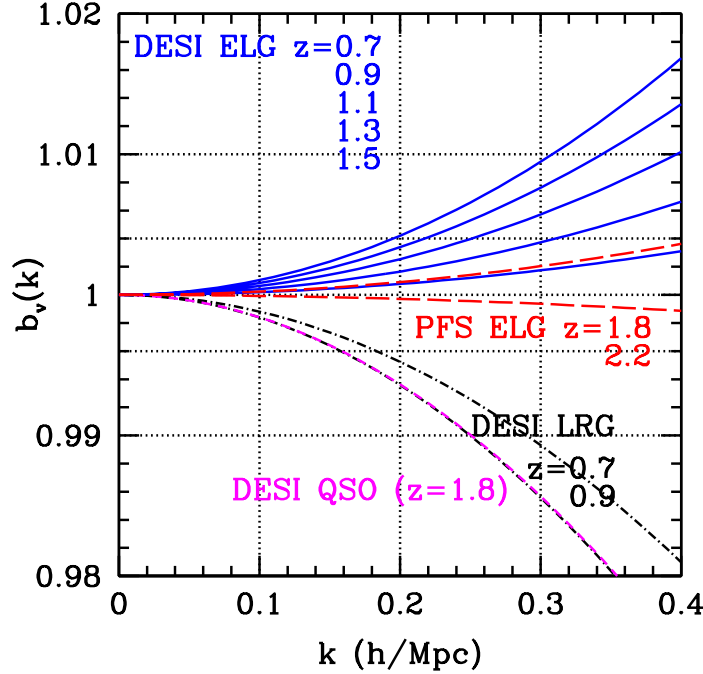


图 3-9 速度偏袒对不同红移巡天的影响。DESI 亮红星系在 $z = 0.9$ 时的结果几乎与 DESI 类星体在 $z = 1.8$ 时的结果重合。(1) $1 \pm 0.4\%$ 的两条点线代表 DESI 对 $f\sigma_8$ 限制能力的总体统计误差的预期值。对于 DESI 来说，速度偏袒是一个重要系统误差来源。(2) Euclid, SKA HI 巡天，及未来第五代暗能量巡天对 $f\sigma_8$ 有更强的限制能力，因此速度偏袒对这些巡天的影响将更加显著。(3) 因为 PFS 的统计误差更大 ($\sim 1\%$)，速度偏袒对 PFS 的影响不是很显著。另外由于 PFS 发射线星系在红移 $z < 1.6$ 时的速度偏袒 b_v 与 DESI 发射线星系类似，因此这里我们只展示 PFS 在红移 $z = 1.8$ 及 2.2 的结果。

Figure 3-9 Implications for RSD surveys. Notice that the line of DESI LRGs at $z = 0.9$ almost overlaps with that of DESI QSO at $z = 1.8$. (1) The dot lines of $1 \pm 0.4\%$ denote the expect overall statistical error in $f\sigma_8$ constrained by DESI. For DESI, velocity bias is a source of significant systematic errors. (2) The velocity bias will be more significant for Euclid, SKA HI survey and the proposed stage V billion object spectra survey, due to their better constraining power in $f\sigma_8$. (3) It is less significant for PFS due to its larger statistical error ($\sim 1\%$). Since b_v of PFS ELGs at $z < 1.6$ is similar to that of DESI ELGs, we only show the PFS results at $z = 1.8$ and 2.2 .

但是，光谱红移巡天 DESI 可以在多个红移区间内将 $f\sigma_8$ 限制在 1% 的精度上，最后总的统计误差为 0.4% ^[116]。图3-9展示了 DESI 中不同星系 b_v 的预测值。这些值由拟合公式3-15计算得到。不同星系的密度偏袒为 $b_{\text{LRG}} = 1.7/D(z)$ ， $b_{\text{ELG}} =$

$0.84/D(z)$ 及 $b_{\text{QSO}} = 1.2/D(z)$ (数据来自 DESI Collaboration et al.^[116])。这里 $D(z)$ 是线性密度增长率利用 $z = 0$ 时的值归一化后的结果 ($D(z = 0) = 1$)。对于 DESI, 不能继续采用 $b_v = 1$ 的近似, 否则会造成 1σ 左右的系统误差。

对于 PFS 的发射线星系, $z < 1.6$ 时预言的 b_v 与 DESI 的发射线星系类似。因此为了展示的简洁, 图3-9中没有画出这部分结果。我们选取了两个不同于 DESI 的红移 $z = 1.8(2.2)$ 进行展示, 采用的密度偏袒值为, $b_{\text{ELG}} = 1.62(1.78)$ (PFS 预测值)。如果仅使用 $k \leq 0.2h/\text{Mpc}$ 的信息, 那么忽略 $b_v \neq 1$ 对 $f\sigma_8$ 造成的系统误差在 0.4% 。由于 PFS 的覆盖天区比 DESI 小一个量级, PFS 红移畸变限制 $f\sigma_8$ 产生的总体统计误差在 $k = 0.2h/\text{Mpc}$ 时的预期值为 $\sim 1\%$ 。因此, 速度偏袒对 PFS 红移畸变的影响不是主导项, 可以采用 $b_v = 1$ 的近似假设。但是, 因为 PFS 星系的数密度更高, 可以在更小的尺度上限制红移畸变, 因此有潜能进一步缩小 $f\sigma_8$ 的统计误差。如图3-9所示, 如果将尺度推进到 $k_{\text{max}} = 0.3h/\text{Mpc}$, $b_v = 1$ 这一假设将不再适用。

正在拟议的 SKA HI 巡天可以覆盖 30000deg^2 的天区, 并且在 $z \lesssim 2$ 的红移范围内, 探测到 $\sim 10^9$ 个 21 厘米星系^[129]。在每一个红移 $0.4 < z < 1.3$ 的范围内, 对每一个 $\Delta z \sim 0.1$ 区间, 将 $f\sigma_8$ 限制在 $\sim 0.3\%$ 。如果假设 $b_v = 1$, 则产生的系统误差将会超过统计误差。对于未来可以测量 10 亿个 LSST 星系光谱的第五代巡天也将如此^[136]。Euclid 巡天的情况介于 DESI 与 SKA 之间。

3.4.2 宇宙学检验等效原理的一个方法

速度偏袒提供了一个新的测试标准宇宙学的方式。实际观测中, 我们虽然无法直接观测星系对暗物质的速度偏袒, 但是我们可以观测两个不同大尺度结构示踪之间速度偏袒的比值。更进一步, 如果这两个示踪在空间中存在重叠区域, 那么此时测得的比值中 cosmic variance 可以抵消^[158]。根据我们得到的结果, 在标准宇宙学模型 ΛCDM 中, 两个示踪的速度偏袒之比为

$$\begin{aligned} \frac{b_{v,1}(k)}{b_{v,2}(k)} - 1 &\simeq b_{v,1}(k) - b_{v,2}(k) \\ &\simeq -0.19\% \left(\frac{k}{0.1h/\text{Mpc}} \right)^2 \times (b_{h,1} - b_{h,2}) . \end{aligned} \quad (3-16)$$

等效原理要求该值对 1 只有微弱的偏差。因此, 如果在 $k < 0.2h/\text{Mpc}$ 时发现 1% 或更大的偏移, 就可以成为等效原理遭到破坏的有利证据, 也就说明需要对现有引力理论进行修改^[159]。我们将在未来的工作中继续研究这一问题。

3.5 对 b_v 测量结果的可能解释

本文对速度偏袒的测量结果远小于 **peak model** 的理论预测，我们的新方法 with **peak model** 的差异主要来自于，(1) 本文使用真实暗晕进行计算，这些暗晕处在晚期宇宙非高斯密度场的峰值密度处，平滑尺度为其位力半径 R_Δ 。而 **peak model** 的理论针对的是原初暗晕，这些暗晕处在初始高斯密度场的峰值密度处，平滑尺度为 $R_S = \Delta^{1/3}/R_\Delta$ 。这里 $\Delta \sim \mathcal{O}(100)$ 是暗晕在其半径 R_Δ 内，相对宇宙平均密度的平均密度。(2) 本文中的速度偏袒定义在四个低红移处，统计量直接从对应红移处的数值模拟中求解，可以直接应用于对应红移处的星系速度测量及 $f\sigma_8$ 的限制。而 Elia et al.^[122]得到的速度偏袒定义在初始高红移处 ($z = 50, 70$)，Baldauf et al.^[124]则使用了线性演化的物质速度场，并非真实速度场。另外，本文测量的是体积权重速度偏袒，而 Baldauf et al.^[124]中则是暗晕数密度权重。

基于上述差异，Zhang^[160]试图给出可能的理论解释。想要在理论上精确求解晚期体积权重下的暗晕速度偏袒，需要给出密度场，密度场梯度，及速度场在平滑尺度 R_Δ 下的联合概率分布函数。由于非线性演化极其复杂，该函数不存在确切的解析形式。但幸运的是，可以通过将密度场进行高斯化，写出合理近似下联合概率分布函数的解析表达式。Zhang^[160]依据上述思考，定量的推导出了低红移体积权重下的暗晕速度偏袒。

3.5.1 高斯化密度场中的速度偏袒

密度场的 N 点联合概率分布函数可以由单点概率分布函数和 N 点的耦合函数 (Copula) 完全刻画^[161]。耦合函数在密度场局域且单调变换下保持不变。Scherrer et al.^[161]利用 N 体数值模拟发现，尽管密度场的单点概率分布函数非高斯，但其两点耦合函数是近高斯的。因此，可以通过单调变换使单点概率分布函数变为高斯，而此时两点概率分布函数也是高斯的。被广泛使用的对数正态 (log-normal) 变换^[162-166]即可以满足需求。

下文所有推导都是建立在耦合函数是高斯的前提假设下。将高斯变换标记为 $G = G(\delta)$ ， G 为高斯化之后的密度场。此时根据前面的假设，无论单点分布 $P(G)$ 还是两点分布 $P(G_1, G_2)$ 都是高斯的。速度场的非高斯性主要体现在小尺度上，因此在我们关心的大尺度速度统计上可以近似认为是高斯。为了简化讨论，下面以一维情况为例，推导 BBKS 中定义的速度偏袒在非线性演化至红移 $z = 0$ 时的形式。密度场 δ ，密度场梯度 δ' ，及速度场 v 的联合概率分布函数为

$$P(v, \delta, \delta') = P(v, G, G') \left(\frac{dG}{d\delta} \right)^2. \quad (3-17)$$

因为 $\langle GG' \rangle = 0$ ，且 $\langle Gv \rangle = 0$ ，因此 $P(v, G, G')$ 可以写为 $P(v, G, G') = P(G)P(v, G')$ 。与速度偏袒有关的分布函数是

$$P(v, G') = \frac{1}{2\pi\sqrt{|C|}} \exp \left[\frac{1}{2} (C^{-1})_{11} + (G')^2 (C^{-1})_{22} + 2vG'(C^{-1})_{12} \right]. \quad (3-18)$$

其中的协方差矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_v^2 & \langle vG' \rangle \\ \langle vG' \rangle & \sigma_{G'}^2 \end{pmatrix}. \quad (3-19)$$

对于处在峰值密度处的暗晕有， $\delta = \Delta$ ， $\delta' = 0$ 。因此 $G = G(\Delta)$ ，且 $G' = 0$ 。暗晕速度弥散为

$$\sigma_{v_h}^2 = \frac{\int v^2 P(v, \delta = \Delta, \delta' = 0) dv}{\int P(v, \delta = \Delta, \delta' = 0) dv} \quad (3-20)$$

$$= \frac{\int v^2 P(v, G' = 0) dv}{\int P(v, G' = 0) dv} \quad (3-21)$$

$$= \sigma_v^2 \left(1 - \frac{\langle vG' \rangle^2}{\sigma_v^2 \sigma_{G'}^2} \right). \quad (3-22)$$

将一维倒数 G' 替换为三维 ∇G ，可得

$$\frac{\sigma_{v_h}^2}{\sigma_v^2} = 1 - r^2, \quad r^2 \equiv \frac{\langle \mathbf{v} \cdot \nabla G \rangle^2}{\sigma_v^2 \sigma_{\nabla G}^2}. \quad (3-23)$$

类似的，可以对 Desjacques et al.^[121]中速度偏袒的定义做同样扩展，得到

$$b_v(k) \simeq 1 - R_v^2 k^2, \quad R_v^2 \equiv \frac{\sigma_G^2}{\sigma_{\nabla G}^2}. \quad (3-24)$$

上述所有公式中， $\sigma_\alpha^2 \equiv \langle \alpha^2 \rangle$ ， $(\alpha = \delta, \nabla \delta, G, \nabla G, \mathbf{v}, \mathbf{v}_h)$ ，所有属性的平滑尺度都是 R_Δ 。速度偏袒是由 $\mathbf{v}$ 与 $\nabla \delta$ 见的关联引起的。因此，无论是非线性演化还是更小尺度的平滑 R_Δ ，都会削弱速度偏袒。因此对 1 产生的偏移量更小，理论上可以更好的符合数值模拟中的测量结果。下文将对公式3-23及3-24进行数值求解，并与 BBKS 及 Desjacques et al.^[121]的结果进行对比。

3.5.1.1 对数正态分布近似下的数值解

实际的密度场分布十分接近对数正态分布^[162-166]。因此，一个很好的高斯变换为

$$G(\delta) = \ln(1 + \delta) - \langle \ln(1 + \delta) \rangle. \quad (3-25)$$

使用累积量展开定理得：

$$1 + \delta = \exp(G - \sigma_G^2/2), \quad 1 + \sigma_\delta^2 = \exp(\sigma_G^2), \quad (3-26)$$

$$\sigma_{\nabla\delta}^2 = \exp(\sigma_G^2)\sigma_{\nabla G}^2, \quad \langle \mathbf{v} \cdot \nabla G \rangle = \langle \mathbf{v} \cdot \nabla G \rangle. \quad (3-27)$$

现在 r 与 R_v 可以完全由密度场的统计量表达：

$$r^2 = \frac{\langle \mathbf{v} \cdot \nabla \delta \rangle^2}{\sigma_v^2 \sigma_{\nabla\delta}^2} (1 + \sigma_\delta^2), \quad R_v^2 = \frac{(1 + \sigma_\delta^2) \ln(1 + \sigma_\delta^2)}{\sigma_{\nabla\delta}^2}. \quad (3-28)$$

上式中的相关量可由非线性密度功率谱求得：

$$\langle \mathbf{v} \cdot \nabla \delta \rangle = \int \frac{k^3}{2\pi^2} P_{\theta\delta} W_{\text{TH}}^2(kR_\Delta) \frac{dk}{k} \quad (3-29)$$

$$= \int \frac{k^3}{2\pi^2} P_\delta W_{\text{TH}}^2(kR_\Delta) \tilde{W}(k) \frac{dk}{k} \quad (3-30)$$

$$\sigma_{\delta, \nabla\delta, v}^2 = \int \frac{k^3}{2\pi^2} P_\delta(k) W_{\text{TH}}^2(kR_\Delta) k^{0.2, -2} \frac{dk}{k}. \quad (3-31)$$

这里的非线性物质功率谱 P_δ 使用 CAMB 网页封装进行测量^①，并采用了 Smith et al.^[167] 的 halofit 形式。计算时使用了平直 Λ CDM 宇宙学，宇宙学参数为 $\Omega_m = 0.268$, $\Omega_\Lambda = 0.732$, $\Omega_b = 0.044$, $\sigma_8 = 0.83$, $n_s = 0.96$ 以及 $h = 0.71$ 。 $W_{\text{TH}}(x) = 3(\sin(x) - x \cos(x))/x^3$ 是 Top-Hat 形式的窗函数。 $\tilde{W}(k) \leq 1$ 由 Zhang et al.^[87] 提出，用来描述非线性演化对速度-密度关系的影响。其参数化形式由 Zheng et al.^[144] 给出。非线性演化削弱了密度-速度关联，从而降低了速度偏袒 b_v 。

图3-10与3-11展示了公式3-23与公式3-24在红移 $z = 0$ 处的数值解。结果显示，测得的 $1 - \sigma_{v_n}^2/\sigma_v^2 = r^2$ 随暗晕质量的增大而增大。分别为 0.3%, 0.9%, 1.9%, 3.6% 以及 5.5%，对应的暗晕质量为 $10^{11,12,13,14,15} M_\odot/h$ (图3-10)。而 BBKS 的预测结果比其大 4 倍以上。 R_v^2 的差别更加显著 (图3-11)。对 $M = 10^{12} M_\odot/h$ 的暗晕，公式3-24预测 $R_v^2 = 0.098 (\text{Mpc}/h)^2$ 。此时， $1 - b_v(k = 0.1 h/\text{Mpc}) \simeq 0.1\%$ 。对 $M = 10^{13} M_\odot/h$ 的暗晕， $R_v^2 = 0.31 (\text{Mpc}/h)^2$ ，此时 $1 - b_v(k = 0.1 h/\text{Mpc}) \simeq 0.3\%$ 。这些结果与本章中基于数值模拟直接测量的速度偏袒，在 $k \leq 0.1 h/\text{Mpc}$ 时几乎一致。而 Desjacques et al.^[121] 中 R_v^2 的预测结果比其大 10 – 20 倍。

3.5.2 小结

Zhang^[160] 将 peak model 的理论扩展到了非线性非高斯的密度场中，从而直接对暗晕而非原初暗晕展开研究。密度场的非高斯演化，更小的平滑尺度 (R_Δ 对比

① https://lambda.gsfc.nasa.gov/toolbox/tb_camb_form.cfm

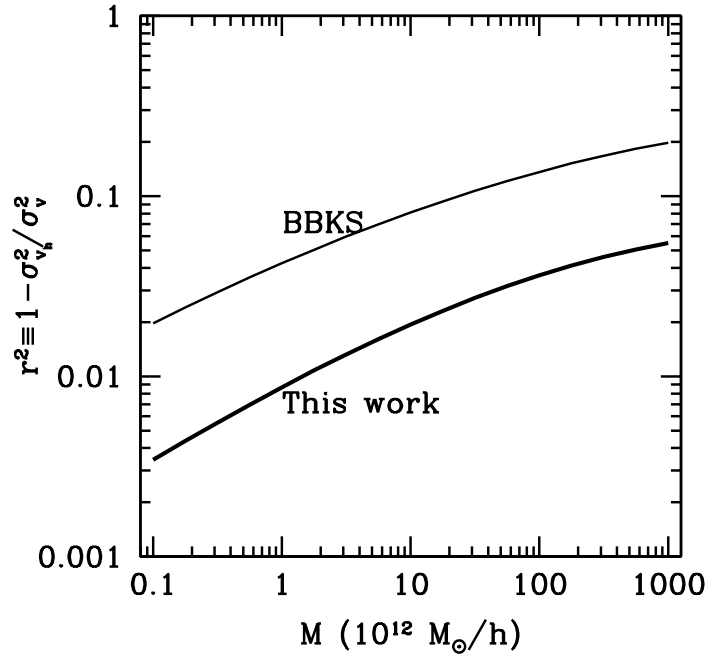


图 3-10 红移 $z = 0$ 时，暗晕速度弥散与物质速度弥散之比的比较， $1 - \sigma_{vh}^2/\sigma_v^2 = r^2$ ，横坐标为暗晕质量。Zhang^[160]的预测比 BBKS 小 4 倍以上。

Figure 3-10 The predicted difference between the $z = 0$ halo velocity dispersion and matter velocity dispersion $1 - \sigma_{vh}^2/\sigma_v^2 = r^2$, as a function of halo mass M . Our prediction is a factor of ~ 4 smaller than the BBKS prediction.

R_S)，更弱的密度-速度关联，都会对速度偏袒产生影响。相比 BBKS 与 Desjacques et al.^[121]，非高斯性会将 r^2 放大 $(1 + \sigma_\delta^2)$ 倍，将 R_v^2 放大 $(1 + \sigma_\delta^2) \ln(1 + \sigma_\delta^2)/\sigma_\delta^2$ 倍 (公式3-28)。相反，非线性演化及更小的平滑尺度会使公式3-28的分母 $\sigma_{\nabla\delta}^2$ 增大，从而压低 r^2 及 R_v^2 。由于分子中 $\langle \mathbf{v} \cdot \nabla \delta \rangle$ 包含的函数 $\tilde{W} \leq 1$ ，因此还会进一步导致 r^2 被压低。这些因素相互竞争，最终产生了一个很小的速度偏袒。

尽管 Zhang^[160]给出了一个可行的论证，但并未完全解释数值模拟中的测量结果。首先，数值模拟显示，无论对何种暗晕，速度偏袒对红移的依赖都随红移的降低单调增大。而 Zhang^[160]对红移的依赖不仅很弱，对小质量暗晕还有可能是非单调的。其次，Zhang^[160]无法解释红移 $z = 0$ 时，对质量较小的暗晕 ($M \lesssim 10^{12} M_\odot/h$)， $b_v > 1$ 的行为。无论是 Zhang^[160]，BBKS，还是 Desjacques et al.^[121]，给出的预测中速度偏袒都不可能大于 1。上述两点未能解决的问题可能与密度场可以被高斯化的程度有关。使用对数正态变换可能会导致结果存在误差 (参见 Neyrinck et al.^[166] 中图 2)。另一个可能的原因是暗晕定义的不同，数值模拟中的暗晕利用 FOF 算法 ($b = 0.2$) 产生，对应的 Δ 依赖于暗晕质量。而 Zhang^[160]中的 Δ 不随暗晕质量发生

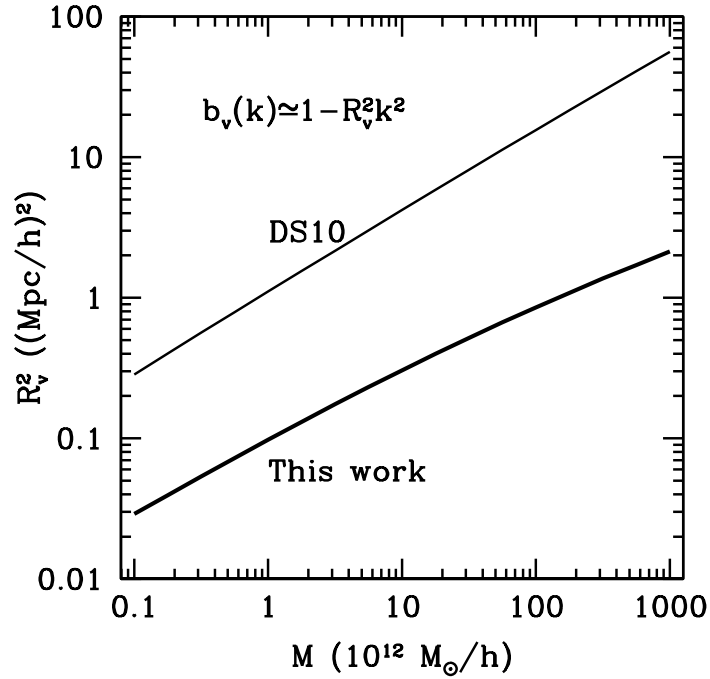


图 3-11 红移 $z=0$ 时, R_v^2 的比较, $b_v = 1 - R_v^2 k^2$, 横坐标为暗晕质量。在 $k = 0.1 h/\text{Mpc}$ 时, Zhang^[160] 的预言与本章利用数值模拟直接计算的速度偏袒结果一致。

Figure 3-11 The predicted R_v^2 ($b_v = 1 - R_v^2 k^2$) at $z = 0$, as a function of halo mass M . At $k = 0.1 h/\text{Mpc}$, we predict $1 - b_v \sim 0.1\%$, consistent with above finding.

变化, 并且, 两者中 Δ 对红移的依赖也有所不同。此外, J6620 中的暗晕剔除了所有未束缚粒子, 这进一步复杂化了问题。

3.6 结论与讨论

本工作中, 我们提出了一个全新的方法来测量体积权重的暗晕速度偏袒 b_v 。该方法不存在长久以来困扰本动速度速度偏袒得以精确测量的采样偏差。我们用 3072^3 粒子数的数值模拟验证了该方法, 当 $k \sim 0.4 h/\text{Mpc}$ 时, 在 1% 的精度上测量了速度偏袒 b_v 。得到的结果与传统对本动速度数据分析时采取的 $b_v = 1$ 的近似不同, 也与 peak model 预言的结果不同。(1) 当 $k > 0.1 h/\text{Mpc}$ 时, b_v 在统计上显著的偏离 1。取决于不同暗晕质量及红移, $|b_v - 1|$ 在 $k \sim 0.2 h/\text{Mpc}$ 时可以达到 $\mathcal{O}(1\%)$, 在 $k \sim 0.4 h/\text{Mpc}$ 时可以达到 $\mathcal{O}(10\%)$ 。如果忽略速度偏袒, 将会使 DESI 的红移畸变宇宙学产生显著的系统误差。对 SKA HI 星系巡天及 Euclid 巡天将会产生更严重的影响。(2) $|b_v - 1|$ 比 peak model 的预言小一个数量级, 并且它对暗晕质量及红移的依赖也与 peak model 的预言不符。我们测得的 b_v 会随红移变化, 而

peak model 预言的结果不随红移改变。对于低质量暗晕, b_v 可以大于 1, 而 peak model 的结果总是有 $b_v < 1$ 。Peak model 基于对原初暗晕的统计, 因此, 我们必须考虑原初暗晕与真实暗晕之间的差异, 以及暗晕相对其原初暗晕的位移, 从而进一步提升对速度偏袒的理论理解。另一个需要考虑的问题是暗晕从其初始位置 (拉格朗日位置) 到现今位置 (欧拉位置) 的位移。这个量会影响定义在欧拉空间中的速度关联。这可能是导致 b_v 大于 peak model 预测的原因, 并且使其随红移的减小而增大。另外, 有理由相信暗晕所处的环境 (如 filament 中或 cluster 中) 也有可能对其速度偏袒有重要影响。例如, filament 中小质量暗晕向 cluster 的坠落速度, 可能是导致小质量暗晕速度偏袒 $b_v > 1$ 的原因。Zhang^[160]将 peak model 的理论扩展到了非线性非高斯的密度场中。从理论上论证了大尺度上速度偏袒消失的问题, 但仍未能完全解释数值模拟中的测量结果。首先是速度偏袒对红移的依赖关系, 其次是对小质量暗晕存在 $b_v > 1$ 。

未来仍有许多待解决的问题需要进一步研究。例如, 因为速度偏袒对密度偏袒存在依赖, 其是否也对暗晕的形成时间也存在依赖? 或者更一般的说, 除了密度偏袒, 还有哪些因素会影响速度偏袒? 它与标准宇宙学中的参数有何种关系? 在修改引力理论中, 速度偏袒的行为如何? 另外, 为了更精准的预测速度偏袒对红移畸变宇宙学的影响, 我们需要产生对应不同巡天目标源的模拟数据, 如亮红星系, 发射线星系, 21 厘米发射线星系等, 并测量它们的速度偏袒。

第四章 成对速度矩母函数 (Pairwise velocity moment generating function) 的研究

利用红移畸变限制结构增长率 $f\sigma_8$ 、区分不同宇宙学模型，首先需要精确构建红移畸变的理论模型。在第三章中，我们在数值模拟中精确测量了暗晕的速度偏袒，并讨论了速度偏袒对红移畸变测量的影响。红移畸变模型模型构建中另一个难点是准确描述真实空间到红移空间的映射关系。该映射可以由成对速度的矩母函数 (pairwise velocity moment generating function) G 完全刻画。本章将通过数值模拟对 G 进行测量，从而研究精确刻画真实空间到红移空间的映射需要哪些条件。

4.1 研究背景

回顾红移畸变模型构建中存在的三个难点：

1. 首先是真实空间到红移空间的映射^[65,76]。该映射是非线性且非定域性的。红移空间中两点关联函数是由真实空间中所有 n 点关联函数共同决定，而非仅由真实空间中的两点关联函数决定。红移空间中某一尺度的成团性会显著受到真实空间中其他尺度成团性的影响。
2. 其次是物质/暗晕密度场与速度场的非线性演化，这个问题也是现代宇宙学长期面临的一个挑战。
3. 最后是星系与暗晕之间，暗晕与物质之间在整个相空间中的非线性以及非定域性的关系^[160,168-170]。

如 §2 所述，红移畸变模型通常把红移空间的关联函数或功率谱展开成一系列真实空间中密度场与速度场的统计量。例如，分布函数方法将红移空间密度场展开成了速度场的矩 (Moment)，然后利用这些矩在傅立叶空间中的各阶关联求得红移空间功率谱^[71]。Okumura et al. [72-73] 在 N 体数值模拟中计算了各阶关联的贡献，结果指出：要想在 $z = 0$ 时 $k \simeq 0.2h/\text{Mpc}$ 或 $z = 2$ 时 $k \simeq 0.3h/\text{Mpc}$ 精确重构红移空间功率谱，至少需要考虑 6 阶的本动速度统计。傅立叶流模型^[90]则把红移空间中的功率谱按照累积量展开 (Cumulant Expansion) 理论进行展开。Chen et al. [171] 使用 N 体数值模拟中的暗晕数据比较了矩展开以及傅立叶流模型，结果指出：当包含 3 阶速度统计信息时，除接近视线方向的模之外，傅立叶流模型可以将误差控制在 $\sim 1\%$ ；但是，当包含 4 阶统计之后，在 $k > 0.2h/\text{Mpc}$ 时反而会

使精度降低。一般来说，现有的红移畸变模型通常（1）利用扰动理论处理大尺度的速度信息，之后加上一个由小尺度随机运动造成的 **Finger-of-God** 效应；（2）或者假设速度场服从某种分布，利用速度场的分布函数构建红移畸变模型。

在本章中，我们退一步考虑问题，只将研究对象聚焦在上述三个难点中的第一点。我们要问的问题是：为了精确描述真实空间到红移空间的映射，哪些大尺度结构的的统计量是必须要考虑的？**Scoccimarro** [65] 已经说明，这个映射完全由成对速度的矩母函数 G 所决定。所以上述问题变成了（1）对 G 应该采取哪种展开？（2）展开后需要保留几阶的成对速度矩？

为了回答这些问题，我们详细研究了矩母函数 G 对暗晕质量及红移的依赖关系，并且量化了各阶矩对 G 的贡献。另外，我们还研究了高斯分布及指数分布近似下，成对速度概率分布函数对 G 的影响，以及利用速度分解方法得到的速度各成分对 G 的影响。

4.1.1 基于功率谱的红移畸变模型

如 §2 所述，本动速度 $\mathbf{v}$ 在宇宙学红移上额外叠加了一个多普勒红移， $z_{\text{obs}} = z + v_{\parallel}/a$ 。这里 $v_{\parallel} = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{x}}$ 是本动速度在视线方向 $\hat{\mathbf{x}}$ 上的投影。因此，红移空间中观测到的星系位置相较其真实位置发生了如下改变：

$$\mathbf{s} = \mathbf{x} + \frac{\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{x}}}{aH(z)} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \frac{v_{\parallel}}{aH(z)} \hat{\mathbf{x}}. \quad (4-1)$$

其中， $H(z)$ 是红移 z 时的哈勃参数。为简化表达，如无特殊说明，本章后续内容中将把 $\mathbf{v}/(aH)$ 记为 $\mathbf{v}$ 。红移空间星系数密度可以表示为

$$n^s(\mathbf{s}) = \bar{n}(1 + \delta^s(\mathbf{s})) = \sum_{\alpha} \delta_{3D}(\mathbf{s} - [\mathbf{x}_{\alpha} + v_{\parallel, \alpha} \hat{\mathbf{x}}_{\alpha}]). \quad (4-2)$$

其中， δ_{3D} 是三维狄拉克函数， $\alpha = 1, 2, 3, \dots$ 为所有考虑范围内的星系。密度涨落 δ^s 的傅立叶变换则可表示为

$$\bar{n} [\delta^s(\mathbf{k}) + (2\pi)^3 \delta_{3D}(\mathbf{k})] = \sum_{\alpha} \exp(i\mathbf{k} \cdot [\mathbf{x}_{\alpha} + v_{\parallel, \alpha} \hat{\mathbf{x}}_{\alpha}]). \quad (4-3)$$

红移空间的功率谱 $P^s(\mathbf{k})$ 由下式定义：

$$\langle \delta^s(\mathbf{k}) \delta^s(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta_{3D}(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P^s(\mathbf{k}). \quad (4-4)$$

可以得到：

$$\bar{n}^2 V (P^s(\mathbf{k}) + (2\pi)^3 \delta_{3D}(\mathbf{k})) = \left\langle \sum_{\alpha\beta} e^{ik_{\parallel} v_{\alpha\beta}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'_{\alpha\beta}} \right\rangle. \quad (4-5)$$

上式中固定了视线方向。 $v_{\alpha\beta} \equiv v_{\parallel,\alpha} - v_{\parallel,\beta}$ 。 $\mathbf{r}' \equiv \mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta$ 。在连续性极限条件下，上述结果变为更常见的形式：

$$P^s(\mathbf{k}) = \int \left(\langle (1 + \delta_1)(1 + \delta_2) e^{ik_{\parallel} v_{12}} \rangle_{\mathbf{r}'} - 1 \right) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} d^3 \mathbf{r}', \quad (4-6)$$

其中， $\delta_i \equiv \delta(\mathbf{x}_i)$ ($i = 1, 2$)， $\mathbf{r}' \equiv \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ ， $v_{12} \equiv v_{\parallel}(\mathbf{x}_1) - v_{\parallel}(\mathbf{x}_2)$ 。 $\langle \cdots \rangle_{\mathbf{r}'}$ 表示对分隔为 $\mathbf{r}'$ 的所有星系对取系综平均。

上述结果广为人知^[65]。很多红移畸变模型都基于公式4-5和4-6或他们的等价形式。例如，Scoccimarro [65], Taruya et al. [66], Zheng et al. [69-70], Seljak et al. [71], Okumura et al. [72], Zhang et al. [87], Zheng et al. [144], Matsubara [172], Song et al. [173]等。

4.1.2 基于关联函数的红移畸变模型

除了功率谱，红移空间的关联函数也可通过流模型进行构建^[76]。

$$1 + \xi^s(\mathbf{r} = (r_{\parallel}, \mathbf{r}_{\perp})) = \int \left(1 + \xi(\mathbf{r}' = (r'_{\parallel}, \mathbf{r}'_{\perp})) \right) p(v_{12} | \mathbf{r}' = (r'_{\parallel}, \mathbf{r}'_{\perp})) dr'_{\parallel}, \quad (4-7)$$

其中， $\mathbf{r}_{\perp}$ 是星系对分隔在垂直视线方向的投影。 $p(v_{12} | \mathbf{r})$ 是成对速度在分隔 $\mathbf{r}$ 处的概率分布函数。

公式4-7的推导是严格的。然而，理论上对 $p(v_{12})$ 理解还相对匮乏，甚至依然没有合适的参数化形式对其进行刻画，因此实际操作中必须采取近似形式。例如，Scoccimarro [65], Fisher [77], Bianchi et al. [83], Cuesta-Lazaro et al. [84], Tinker [86], Kuruvilla et al. [88], Sheth [174], Juszkiewicz et al. [175], Bianchi et al. [176]。著名的高斯流模型就假设 $p(v_{12})$ 为高斯分布^[78]。

4.1.3 成对速度矩母函数与红移畸变模型的关系

无论是红移空间的功率谱还是关联函数，都由成对速度的矩母函数决定^[65]，

$$G(k_{\parallel}, \mathbf{r}) = \frac{\langle (1 + \delta_1)(1 + \delta_2) e^{ik_{\parallel} v_{12}} \rangle}{1 + \xi(r)}, \quad (4-8)$$

其中， $\xi(r) = \langle \delta_1 \delta_2 \rangle$ 是真实空间中的两点关联函数。 G 是成对速度的矩母函数可由下式证明：

$$\langle v_{12}^m \rangle \equiv \frac{\langle (1 + \delta_1)(1 + \delta_2) v_{12}^m \rangle}{1 + \xi(r)} = \frac{\partial^m G}{\partial (ik_{\parallel})^m} \Big|_{k_{\parallel}=0}, m \geq 1. \quad (4-9)$$

对于离散分布的星系，矩母函数可以通过下式求得：

$$G(k_{\parallel}, \mathbf{r}) \equiv \frac{\langle \sum_{\alpha\beta} \exp(ik_{\parallel} v_{\alpha\beta}) \rangle_{\mathbf{r}_{\alpha\beta}=\mathbf{r}}}{\langle \sum_{\alpha\beta} \rangle_{\mathbf{r}_{\alpha\beta}=\mathbf{r}}} . \quad (4-10)$$

这里，系综平均作用于所有间隔为 $\mathbf{r}_{\alpha\beta} - \mathbf{r}$ 的星系对。当 $r \rightarrow \infty$ 时，星系对的空间关联性消失，则

$$G(k_{\parallel}, r \rightarrow \infty) \equiv G_{\infty} = \langle e^{ik_{\parallel} v_{\alpha}} \rangle^2 . \quad (4-11)$$

此时， $G > 0$ ，对应 FoG 效应^[87,144]。

成对速度的矩母函数对红移畸变模型的构建起了决定性作用，主要体现在两个方面：

- 首先， G 直接决定了红移空间中的功率谱：

$$P^s(\mathbf{k}) = \int \left[\left(1 + \xi(r') \right) G(k_{\parallel}, \mathbf{r}') - 1 \right] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} d^3 \mathbf{r}' . \quad (4-12)$$

- 其次， G 决定了成对速度的概率分布函数，进而决定了红移空间中的关联函数：

$$p(v_{12} | \mathbf{r}) = \int G(k_{\parallel}, \mathbf{r}) e^{ik_{\parallel} v_{12}} \frac{dk_{\parallel}}{2\pi} . \quad (4-13)$$

- 上述关系在 Scoccimarro [65] 中广为人知。我们进一步定义了一个混合空间中的统计量， $P^s(k_{\parallel}, r_{\perp})$ 。在公式4-12两边同时乘以 $\int \exp(-i\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{r}_{\perp}) d^2 \mathbf{k}_{\perp} / (2\pi)^2$ ，可以得到，

$$P^s(k_{\parallel}, r_{\perp}) = \int \left[\left(1 + \xi(r) \right) G(k_{\parallel}, \mathbf{r}) - 1 \right] e^{ik_{\parallel} r_{\parallel}} dr_{\parallel} . \quad (4-14)$$

这个量既非关联函数，也非功率谱，但其拥有以下优点：(1) 首先， $G(k_{\parallel} = 0) = 1$ ，且 $P^s(k_{\parallel} = 0, r_{\perp}) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(r_{\parallel}, r_{\perp}) dr_{\parallel} = w_p(r_{\perp})$ 。即傅立叶模 $k_{\parallel} = 0$ 时，该量不受红移畸变的影响，且其值等于投影关联函数 w_p ^①。因此红移畸变被限制在 $k \neq 0$ 的模中。功率谱 $P^s(\mathbf{k})$ 也有这一优点，但是关联函数 ξ^s 不具备这种优点， $\xi^s(r_{\parallel}, r_{\perp})$ 在所有位形空间中的点都会受到红移畸变的影响。(2) 在用矩母函数 G 刻画红移畸变模型时，该量在数值计算上是最直接的，仅需要对 $r_{\parallel}$ 进行积分。(3) 在测量中，该量可以直接从关联函数转换而来。而关联函数可以很好的处理巡天遮罩以及视线方向变化带来的问题。

① 投影关联函数 $w_p(r_{\perp})$ 通常定义为无量纲形式 $w_p(r_{\perp})/r_{\perp}$ 。

4.2 研究方法

4.2.1 成对速度矩母函数的矩展开及累积量展开

G 具备一大优点：将其进行泰勒级数展开，可以得到一系列具有物理意义的展开系数。这里，展开的方式可以是矩展开，也可以是累积量展开。

4.2.1.1 矩展开

矩展开是直接对 G 做泰勒级数展开

$$\begin{aligned}
 G(k_{\parallel}, \mathbf{r}) &= 1 - \sum_{m \geq 1} (-1)^{m-1} \frac{\langle v_{12}^{2m} \rangle}{(2m)!} k_{\parallel}^{2m} \\
 &\quad + i \sum_{m \geq 1} (-1)^{m-1} \frac{\langle v_{12}^{2m-1} \rangle}{(2m-1)!} k_{\parallel}^{2m-1} \\
 &= 1 + i \langle v_{12} \rangle k_{\parallel} - \frac{1}{2} \langle v_{12}^2 \rangle k_{\parallel}^2 \\
 &\quad - \frac{1}{6} i \langle v_{12}^3 \rangle k_{\parallel}^3 + \frac{1}{24} \langle v_{12}^4 \rangle k_{\parallel}^4 + \dots .
 \end{aligned} \tag{4-15}$$

公式4-15的收敛速度取决于成对速度的矩 $\langle v_{12}^m \rangle (m = 1, 2, 3, \dots)$ 。利用数值模拟，我们可以有效地量化每一项系数对矩母函数的贡献，从而决定在红移畸变模型中应当保留的阶数。

4.2.1.2 累积量展开

公式4-15并不是 G 的唯一展开方式，我们也可以对 $\ln(G)$ 进行泰勒级数展开。此时展开系数变成了成对速度的累积量 $\langle v_{12}^m \rangle_c (m = 1, 2, 3, \dots)$ 。Scoccimarro [65]指出 $\ln(G)$ 是累积量母函数，但并未给出其展开系数为累积量的证明。现证明如下。

定义一个任意场 y ，满足

$$y \equiv \ln(1 + \delta) - \langle \ln(1 + \delta) \rangle . \tag{4-16}$$

令 $\lambda = ik_{\parallel}$ ，得到

$$\begin{aligned}
 G(\lambda | \mathbf{r}) &\equiv \frac{\langle (1 + \delta_1)(1 + \delta_2) \exp(\lambda v_{12}) \rangle}{\langle (1 + \delta_1)(1 + \delta_2) \rangle} \\
 &= \frac{\langle \exp[(y_1 + y_2) + \lambda v_{12}] \rangle}{\langle (1 + \delta_1)(1 + \delta_2) \rangle} \\
 &= \frac{1}{1 + \xi(r)} \exp \left[\sum_{n \geq 2} \frac{\langle ((y_1 + y_2) + \lambda v_{12})^n \rangle_c}{n!} \right] \\
 &= \exp \left[\sum_{m \geq 1} \frac{c_m(\mathbf{r})}{m!} \lambda^m \right].
 \end{aligned} \tag{4-17}$$

其中，展开系数为

$$c_m \equiv m! \sum_{n \geq 2, n \geq m} \frac{C_n^{n-m}}{n!} \frac{\langle (y_1 + y_2)^{n-m} v_{12}^m \rangle_c}{1 + \xi(r)}. \tag{4-18}$$

另外，展开系数满足以下关系：

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \langle v_{12} \rangle \equiv \langle v_{12} \rangle_c, \\
 c_2 &= \langle (v_{12} - c_1)^2 \rangle \equiv \langle v_{12}^2 \rangle_c, \\
 c_3 &= \langle (v_{12} - c_1)^3 \rangle \equiv \langle v_{12}^3 \rangle_c, \\
 c_4 &= \langle (v_{12} - c_1)^4 \rangle - 3 \langle (v_{12} - c_1)^2 \rangle^2 \equiv \langle v_{12}^4 \rangle_c \dots
 \end{aligned} \tag{4-19}$$

也就是说，展开项的系数 c_m 是成对速度的累积量 $\langle v_{12}^m \rangle_c$ 。成对速度的矩母函数的累积量展开形式为

$$\begin{aligned}
 \ln G(k_{\parallel}, \mathbf{r}) &= - \sum_{m \geq 1} (-1)^{m-1} \frac{\langle v_{12}^{2m} \rangle_c}{(2m)!} k_{\parallel}^{2m} \\
 &\quad + i \sum_{m \geq 1} (-1)^{m-1} \frac{\langle v_{12}^{2m-1} \rangle_c}{(2m-1)!} k_{\parallel}^{2m-1}.
 \end{aligned} \tag{4-20}$$

即， $\ln(G)$ 为成对速度的累积量母函数，而 G 为成对速度的矩母函数。

密度场近似服从对数正态分布，而速度场近似服从高斯分布。在以上两种条件下，公式4-20中的 $k_{\parallel}$ 及 $k_{\parallel}^2$ 为主导项。因此，公式4-20预期的收敛速度应当优于公式4-15。这一结论与高斯流模型的假设相吻合。后文中数值计算的结果也显示公式4-20的收敛速度确实更快。即便如此，我们发现在 $k \gtrsim 0.2h/\text{Mpc}$ 时， $k_{\parallel}^{3,4}$ 不能被忽略。因此高斯流模型仍然需要改进。

4.2.2 本动速度的分解

如前所述, 本动速度的矩母函数决定成对速度的概率分布函数, 反之亦然。许多模型都需要假定某种形式的成对速度概率分布函数。例如高斯分布 (Reid et al. [78]) 或指数分布 (Sheth [174]) 等。下面我们将研究高斯及指数分布近似下, 速度概率分布函数对成对速度矩母函数的影响。为了简化讨论, 这里我们使用单点统计的速度概率分布函数, 而非更加复杂的成对速度概率分布函数。二者的结果应当具有相似性。数值模拟中的统计结果显示, 本动速度分布在相对低速的线性尺度上近似服从高斯分布:

$$p_{\mathcal{G}}(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\mathcal{G}}^2}} \exp(-v^2/2\sigma_{\mathcal{G}}^2). \quad (4-21)$$

而在高速且非线性尺度上近似服从指数分布:

$$p_{\mathcal{E}}(v) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma_{\mathcal{E}}^2}} \exp(-\sqrt{2}|v|/\sigma_{\mathcal{E}}), \quad (4-22)$$

其中, $\sigma_{\mathcal{G}, \mathcal{E}}$ 是成对速度高斯/指数分布成分的速度弥散, 两者满足关系 $\sigma_{\mathcal{G}}^2 + \sigma_{\mathcal{E}}^2 = \sigma^2$ 。对应的傅立叶变换为

$$\mathcal{G} = \exp(-\sigma_{\mathcal{G}}^2 k^2/2), \mathcal{E} = \frac{1}{\sigma_{\mathcal{E}}^2 k^2/2 + 1}. \quad (4-23)$$

假设其高斯成分与指数成分相互独立, 那么矩母函数可以写为

$$G \approx \mathcal{G}(\sigma_{\mathcal{G}})\mathcal{E}(\sigma_{\mathcal{E}}). \quad (4-24)$$

在上述假设条件下, 矩母函数的虚部 $\text{Im}(G) = 0$ 。高斯成分与指数成分的比例决定了矩母函数实部 $\text{Re}(G)$ 的上下限。

更进一步, Zhang et al. [87] 提供了一种本动速度场的分解方法, 将本动速度分解为三个成分 $\mathbf{v}_{\delta}$, $\mathbf{v}_B$, 以及 $\mathbf{v}_S$ 。其中, $\mathbf{v}_{\delta}$ 是密度场关联成分。在线性尺度 $k \ll k_{NL}$ (下标 NL 代表非线性 non-linear) 起主导作用。并且由于小尺度结构的非线性演化, 该项会在小尺度逐渐减小。不同于 $\mathbf{v}_{\delta}$, 随机成分 $\mathbf{v}_S$ 以及有旋成分 $\mathbf{v}_B$ 是在非线性尺度逐渐产生, 并且后来成为主导成分。Zheng et al. [144] 在 N 体数值模拟中验证了上述结论。在本章中, 我们简化了本动速度的分解。我们只将其分为两个成分: 密度场关联成分 $\mathbf{v}_{\delta}$, 及其余随机成分 (Zhang et al. [87] 中的 $\mathbf{v}_B + \mathbf{v}_S$)。我们使用上标 L 与 S 分别标记这两个成分。即, $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^L(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^S(\mathbf{x})$ 。在傅立叶空间中,

$$\mathbf{v}^L(\mathbf{k}) = -i \frac{H(z)\delta(\mathbf{k})W(k)}{k^2} \mathbf{k}. \quad (4-25)$$

Set ID	Mass Range	$\langle M \rangle$	$N_h/10^4$
A1($z = 0.0$)	> 10	37.70	8.66
$z = 0.5$	> 10	30.03	6.70
$z = 1.0$	> 10	23.77	4.30
$z = 1.5$	> 10	20.39	2.53
A2($z = 0.0$)	1-10	2.67	69.23
$z = 0.5$	1-10	2.61	66.88
$z = 1.0$	1-10	2.51	59.86
$z = 1.5$	1-10	2.41	50.49
A3($z = 0.0$)	0.1-1	0.27	506.14
$z = 0.5$	0.1-1	0.27	523.57
$z = 1.0$	0.1-1	0.26	527.22
$z = 1.5$	0.1-1	0.26	508.97

表 4-1 J6610 中三组不同质量暗晕的相关参数。质量单位为 $10^{12}M_\odot/h$ 。 $\langle M \rangle$ 为平均暗晕质量。 N_h 为该组中暗晕数目。

这里的窗函数为

$$W(k) = \frac{P_{\delta\theta}(k)}{P_{\delta\delta}(k)}. \quad (4-26)$$

其中, $\theta = -\nabla \cdot \mathbf{v}$ 是本动速度的散度。则矩母函数可以表示为

$$\begin{aligned} G &= \frac{\langle (1 + \delta_1)(1 + \delta_2) \exp(ik_{\parallel}v) \rangle}{1 + \xi(r)} \\ &= \frac{\langle (1 + \delta_1)(1 + \delta_2) \exp(ik_{\parallel}v^L) \exp(ik_{\parallel}v^S) \rangle}{1 + \xi(r)}. \end{aligned} \quad (4-27)$$

如果密度场满足对数正态分布, 假设 L 与 S 的成分相互独立, 则存在以下关系:

$$\ln G = \ln G^L + \ln G^S. \quad (4-28)$$

我们预期 G^L 应该接近高斯分布, 而 G^S 应该接近指数分布。通过公式4-24与公式4-28, 我们可以在数值模拟中检验上述假设。

4.2.3 数值模拟

我们利用 CosmicGrowth 数值模拟计算了不同 $k_{\parallel}$ 及 $(r_{\parallel}, r_{\perp})$ 时, 矩母函数 G 以及两种展开形式 (公式4-15与4-20) 的展开系数。我们选取了三组盒子大小为 $L_{\text{box}} = 600\text{Mpc}/h$ 的数值模拟 (参见表格1-5中 WMAP_3072_600)。这三组模拟均采用了相同参数的标准宇宙学模型 (参见表格1-4中 WMAP ΛCDM)。我们将该

宇宙学的三个数值模拟实现标记为 J6610, J6611, 及 J6612。暗晕数据首先通过 Friends-of-Friends(FoF) 算法寻找, 其中, 链的长度为 $b = 0.2$ 倍粒子平均间隔距离。之后从结果中剔除了所有未束缚粒子。最后得到暗晕数据集。我们将暗晕按照不同质量分为三组, 标记为 A1, A2, 及 A3。另外, 我们选取了 4 个不同红移下的数据, $z \approx 0, 0.5, 1, 1.5$ 。表格4-1列出了 J6610 中三组暗晕在不同红移处的相关参数。J6611 及 J6612 与 J6610 规格相似。

我们用最近格点赋值 (NGP) 的方法构建所需的各种场。采用的格点数目为 600^3 。格点的大小为 $L_{\text{grid}} = 1\text{Mpc}/h$ 。对每一个格点, 我们分别测量 $\alpha_i = \sum_{\gamma} \cos(k_{\parallel} v_{\parallel, \gamma})$, $\beta_i = \sum_{\gamma} \sin(k_{\parallel} v_{\parallel, \gamma})$, 及 $p_i^n = \sum_{\gamma} v_{\parallel, \gamma}^n$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$)。这里需要指出, $p_i^0 = \sum_{\gamma} (1 + \delta_i)$ 。 $\sum_{\gamma}$ 代表对靠近第 i 个格点的所有粒子进行求和。则矩母函数的实部与虚部可以通过下式进行计算:

$$G(k_{\parallel}, \mathbf{r}) = \frac{\langle \beta_1 \beta_2 + \alpha_1 \alpha_2 \rangle_{\mathbf{r}}}{\langle p_1^0 p_2^0 \rangle_{\mathbf{r}}} + i \frac{\langle \alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2 \rangle_{\mathbf{r}}}{\langle p_1^0 p_2^0 \rangle_{\mathbf{r}}} . \quad (4-29)$$

成对速度的矩的计算公式为

$$\langle v_{12}^m \rangle = \frac{\langle \sum_{n=0}^m C_m^{m-n} (-1)^n p_1^n p_2^{m-n} \rangle_{\mathbf{r}}}{\langle p_1^0 p_2^0 \rangle_{\mathbf{r}}} . \quad (4-30)$$

需要注意, 公式4-29及4-30中, 等号右边可以通过快速傅立叶变换 FFT 对计算进行加速。对每个 $k_{\parallel}$ 模, 通过 8 次 FFT 即可得到所有间隔为 $\mathbf{r}$ 的 G 。对 $\langle v_{12}^m \rangle$, 需要 ≥ 3 次的 FFT。但是, 由于我们只需要研究十几个 $\mathbf{r}$ 处的情况, 因此这里我们通过格点上直接数对数的方法来计算上述统计量。我们可以分别选取数值模拟中三个不同方向的轴 x, y, z 作为视线方向。因此对每个模拟都可以得到三个独立的测量。加上 3 个独立的数值模拟, 因此, 一共有 9 个独立测量。我们利用这 9 个独立测量估计测量量的误差。

为了获取暗晕本动速度场的密度关联成分及随机成分, 我们首先需要利用公式4-25计算 $\mathbf{v}^L(\mathbf{k})$ 。在计算公式4-25中的各个量时, 我们采用了 512^3 的格点数来构建所需的场。之后通过逆傅立叶变换得到位形空间中的 $\mathbf{v}^L$ 。在上一章中, 我们已经证明在大尺度上暗晕与暗物质不存在速度偏袒, 且提供了可能的解释, 因此, 这里我们可以认为密度关联的速度成分等于其暗物质背景的速度, 即 $\mathbf{v}_h^L = \mathbf{v}^L$ 。最后, 暗晕速度的随机成分 $\mathbf{v}_h^S = \mathbf{v}_h - \mathbf{v}^L$ 。

4.3 计算结果及分析

矩母函数 $G \equiv G(k_{\parallel}, r_{\parallel}, r_{\perp})$ 依赖于 $k_{\parallel}$, $r_{\parallel}$, $r_{\perp}$, 红移, 以及暗晕质量。这里我们主要展示 A2 组的结果。对相同阶数的矩/累积量展开, 由于更大质量暗晕受到

的小尺度非线性影响较小，因此 A1 的精度略好于 A2。但是，由于 A1 中暗晕的数目减少了一个量级，因此测得的结果噪音也更大。相反，A3 的精度略逊于 A2，但是噪音测量的噪音更小。因此，我们主要展示处于中间位置的 A2 组的测量结果。红移方面，这里主要展示 $z = 0$ 时的情况，必要时也会展示 $z = 1$ 的情况作为对比。对于傅立叶波矢 k ，我们的目标是满足第四代暗能量巡天计划的限制能力，即 $k = 0.2h/\text{Mpc}$ 。同时，由于第五代暗能量巡天可以达到 $k \sim 0.5h/\text{Mpc}$ ，因此我们也会展示 $k > 0.2h/\text{Mpc}$ 的结果。

4.3.1 必须包含 $\langle v_{12}^{3,4} \rangle$

图4-1展示了红移 $z = 0$ 时，对 4 组不同的间隔 $(r_{\parallel}, r_{\perp}) = (10, 0), (0, 10), (50, 0)$ ，与 $(0, 50)$ (单位为 Mpc/h)，计算得到的矩母函数 G 随 $k_{\parallel}$ 的变化。我们首先比较领头项 (图中虚线)。这里需要指出：对于矩展开，领头项为 $G \simeq 1 + i\langle v_{12} \rangle k_{\parallel} - \langle v_{12}^2 \rangle k_{\parallel}^2 / 2$ ；而对于累积量展开，领头项为 $G \simeq \exp(1 + i\langle v_{12} \rangle k_{\parallel} - \langle v_{12}^2 \rangle_c k_{\parallel}^2 / 2)$ 。所有系数 ($\langle v_{12}^n \rangle$ 和 $\langle v_{12}^n \rangle_c$) 均使用相同的数值模拟进行测量。可以看到在 $k_{\parallel} = 0.1h/\text{Mpc}$ 的尺度上，矩展开的结果已经不再精确。其虚部体现的尤为明显。然而在相同尺度上，累积量展开依然可以精确符合直接计算的结果。由于只保留领头项的累积量展开等价于高斯形式的成对速度概率分布函数，因此这里的结果也验证了高斯流模型^[78]在大尺度上的可靠性。但是，在 $k_{\parallel} \sim 0.2h/\text{Mpc}$ 的尺度上，领头项近似已经不足以给出符合虚部的计算结果。

为了提高在目标尺度 $k_{\parallel} \sim 0.2h/\text{Mpc}$ 上的精度，必须考虑次领头项的贡献 (图中实线)。即，矩母函数的矩展开应保留至 $G \simeq 1 + i[\langle v_{12} \rangle k_{\parallel} - \langle v_{12}^3 \rangle k_{\parallel}^3 / 6] - [\langle v_{12}^2 \rangle k_{\parallel}^2 / 2 - \langle v_{12}^4 \rangle k_{\parallel}^4 / 24]$ 。但此时矩展开依然无法满足精度需求，特别是虚部的结果。包含次领头项的累积量展开为 $G \simeq \exp(i[\langle v_{12} \rangle k_{\parallel} - \langle v_{12}^3 \rangle_c k_{\parallel}^3 / 6] - [\langle v_{12}^2 \rangle_c k_{\parallel}^2 / 2 - \langle v_{12}^4 \rangle_c k_{\parallel}^4 / 24])$ 。此时，累积量展开在 $k_{\parallel} = 0.2h/\text{Mpc}$ 时满足精度需求。当 $r_{\perp} \neq 0$ 时，累积量展开甚至在 $k_{\parallel} \sim 0.4h/\text{Mpc}$ 时依然精确。

对其他红移可以得到类似的结论。图4-2展示了 $z = 1$ 的结果。综上，这里我们得到的第一个结论为：为了在 $k_{\parallel} \sim 0.2h/\text{Mpc}$ 精确描述矩母函数 G ，不仅需要包含 $\langle v_{12}^{1,2} \rangle$ ，还需要包含 $\langle v_{12}^{3,4} \rangle$ 。矩母函数 G 完全决定了红移畸变，这也预示着在红移畸变模型中，必须包含 $\langle v_{12}^{3,4} \rangle$ 。可以看到， $\langle v_{12}^{3,4} \rangle$ 与大尺度结构 (LSS) 的关联最终会变为 6 阶统计量 ($\delta^2 v^4$)，这将会是构建红移畸变模型的一个巨大挑战。

我们进一步研究了上述结论产生的原因。对矩展开，我们将 $k_{\parallel}^3$ 项与 $k_{\parallel}$ 项的比值记为 $R_{3/1} k_{\parallel}^2 / 6$ 。对累积量展开，将该比值记为 $R_{3/1,c} k_{\parallel}^2 / 6$ 。其中， $R_{3/1} \equiv \langle v_{12}^3 \rangle / \langle v_{12} \rangle$ ， $R_{3/1,c} \equiv \langle v_{12}^3 \rangle_c / \langle v_{12} \rangle$ 。图4-3展示了 $R_{3/1}$ 及 $R_{3/1,c}$ 。图中选取了 $r_{\perp} = 0$ ，该方向对描述

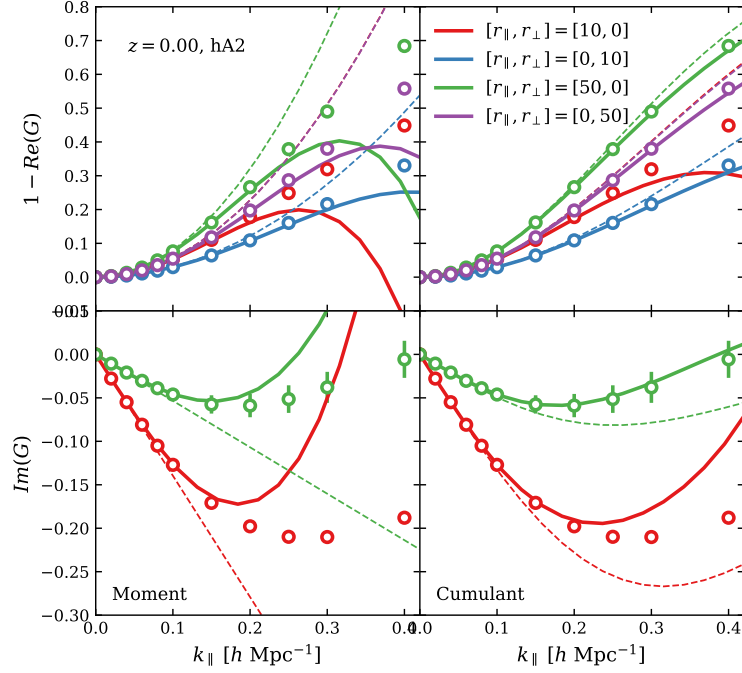
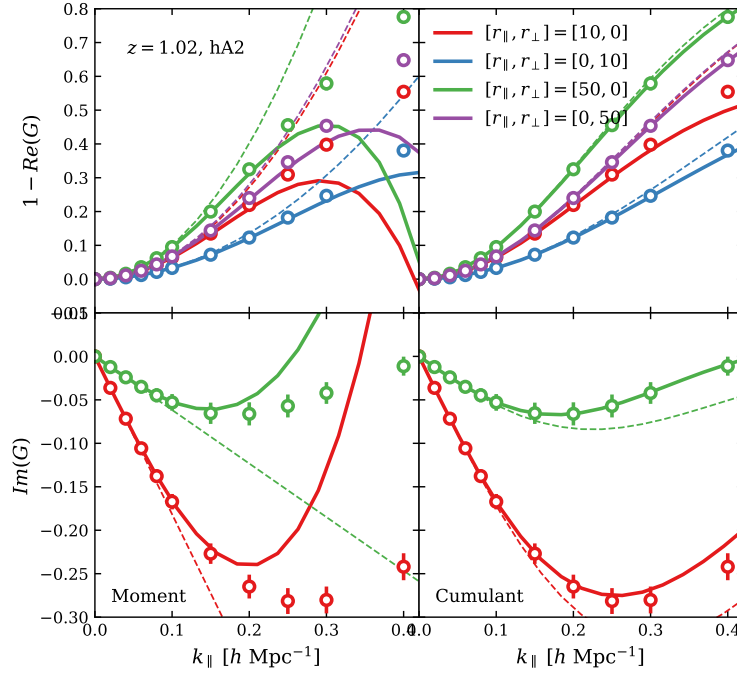


图 4-1 在红移 $z=0$ 时，对 A2 ($10^{12} M_{\odot}/h < M < 10^{13} M_{\odot}/h$) 组暗晕成对速度矩母函数 G 的测量结果。上下子图分别对应 G 的实部 $1 - \text{Re}(G)$ 以及虚部 $\text{Im}(G)$ 。左右子图分别对应矩展开及累积量展开。数据点是通过数值模拟直接测量得到的矩母函数，误差棒为 9 个独立测量的方均根 (3 个数值模拟实现 $\times$ 3 个独立方向)。曲线为展开为成对速度的矩 $\langle v_{12} \rangle^m$ 或累积量 $\langle v_{12} \rangle_c^m$ 后进一步计算得到的结果。其中，虚线展开至 $m=1$ (虚部)，2 (实部)，实线展开至 $m=3$ (虚部)，4 (实部)。一个重要发现是累积量展开显著的好于矩展开。仅在领头项近似的情况下， $k \leq 0.1 h/\text{Mpc}$ 时也有很好的表现。包含了 3 阶及 4 阶后，累积量对所有位形空间中的值，在 $k < 0.2 h/\text{Mpc}$ 时都表现优秀。此外，对于 $r_{\parallel} \geq 20 \text{Mpc}/h$ ，累积量适用的范围可以达到 $k \sim 0.4 h/\text{Mpc}$ 。由于 $v_{\parallel} \leftrightarrow -v_{\parallel}$ 存在对称性，虚部 ($\text{Im}G$) 在 $r_{\parallel} = 0$ 时的值为 0，因此这里没有展示。

Figure 4-1 The pairwise velocity generating function G at $z=0$, for the halo set A2 ($10^{12} M_{\odot}/h < M < 10^{13} M_{\odot}/h$). Data points (with errorbars) are directly measured from the 3 simulation realizations and the errorbars are r.m.s of the 9 independent measurements (3 simulation realization $\times$ three directions). Top/bottom panels correspond to the real/imaginary part of G respectively. Left/right panels correspond to the results of moment/cumulant expansions. The dash lines cut off at the leading order terms ($\langle v_{12}^{1,2} \rangle, \langle v_{12}^{1,2} \rangle_c$), while the solid lines include the next-to-leading order terms ($\langle v_{12}^{1,2,3,4} \rangle, \langle v_{12}^{1,2,3,4} \rangle_c$). The major finding is that the cumulant expansion works significantly better than the moment expansion. The leading order approximation is excellent at $k \leq 0.1 h/\text{Mpc}$. Including $\langle v_{12}^{3,4} \rangle$, the cumulant expansion is excellent at $k < 0.2 h/\text{Mpc}$ for all $(r_{\parallel}, r_{\perp})$ configurations. Furthermore, for $r_{\parallel} \geq 20 \text{Mpc}/h$, it is excellent to $k \sim 0.4 h/\text{Mpc}$. Bottom panels ($\text{Im}G$) does not show the configurations with $r_{\parallel} = 0$, for which $\text{Im}G=0$ due to the $v_{\parallel} \leftrightarrow -v_{\parallel}$ symmetry.

图 4-2 同图4-1，但是为 $z = 1$ 时的结果。Figure 4-2 Similar to Fig. 4-1 but for redshift $z \approx 1$.

矩母函数和红移畸变来说是最不利的方向。从图中可以看到， $R_{3/1}$ 及 $R_{3/1,c}$ 的典型值为 $\sim 10 - 100 (\text{Mpc}/h)^2$ 。因此，在 $k_{\parallel} \gtrsim 0.1 h/\text{Mpc}$ 时， $k_{\parallel}^3$ 项相比 $k_{\parallel}$ 项已经无法忽略。这个趋势没有在间隔增大时发生改变，这也与我们的预期相符。相比之下， $R_{3/1}$ 在间隔增大时增加的更快，因此矩展开的表现也更糟。事实上，在 $r_{\parallel} \sim 100 \text{Mpc}/h$ 时，矩展开保留至 3 阶时甚至已经无法正确预测 $\text{Im}(G)$ 在 $k \geq 0.25 h/\text{Mpc}$ 时的符号。

类似的，对矩展开，我们将 $k_{\parallel}^4$ 项与 $k_{\parallel}^2$ 项的比值记为 $R_{4/2} k_{\parallel}^2/12$ 。对累积量展开，将该比值记为 $R_{4/2,c} k_{\parallel}^2/12$ 。计算结果也显示在图4-3中。当展开到 4 阶时，最坏的情况发生在 $R_{4/2}$ ($R_{4/2,c}$) 最大处， $r_{\parallel} \sim 5 \text{Mpc}/h$ ，此时典型值为 $\sim 50 (\text{Mpc}/h)^2$ 。需要注意 $R_{4/2}$ 的最大值小于 $R_{3/1}$ 的最大值。考虑到泰勒展开前面带有额外系数 $1/2$ ，4 阶项带来的实际修正效果在实部中要小于 3 阶项在虚部中的影响。

4.3.2 累积量展开更好

图4-4展示了忽略 5 阶以上展开项 ($k_{\parallel}^{n \geq 5}$) 时，在 $k_{\parallel} = 0.2 h/\text{Mpc}$ 处， G 的矩展开/累积量展开在 $r_{\perp}, r_{\parallel}$ 平面上的误差。在所有感兴趣的尺度范围内 ($r_{\perp} < 100 \text{Mpc}/h$, $r_{\parallel} < 100 \text{Mpc}/h$)，累积量的展开均优于矩展开。最大误差产生在 $r_{\perp} \lesssim$

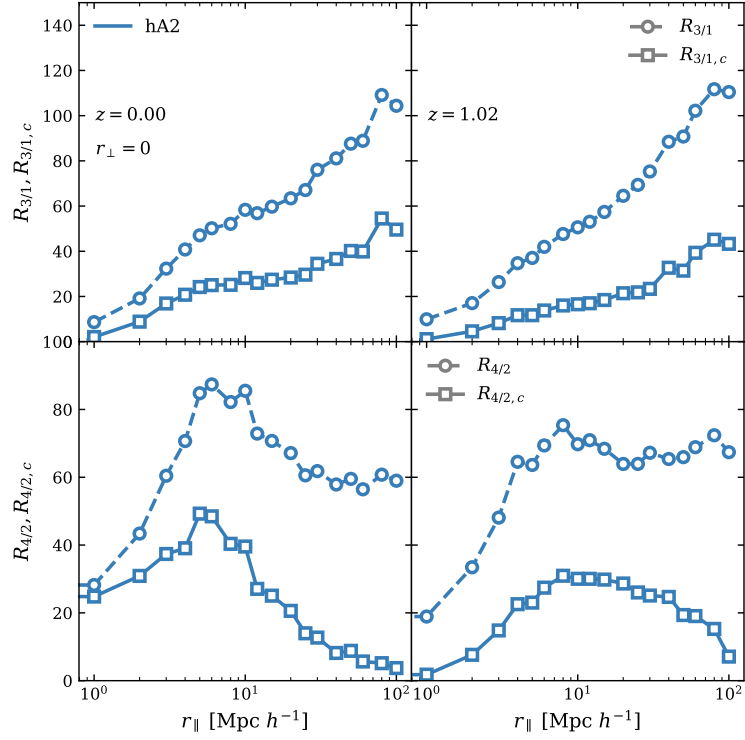


图 4-3 矩展开/累积量展开系数之比。 $R_{3/1} \equiv \langle v_{12}^3 \rangle / \langle v_{12} \rangle$ 及 $R_{4/2} \equiv \langle v_{12}^4 \rangle / \langle v_{12}^2 \rangle$ 。这两个值反映了矩展开中次领头项相对领头项的重要性。对于累积量展开，对应的量分别为 $R_{3/1,c}$ 及 $R_{4/2,c}$ 。这些结果解释了为什么在矩母函数的计算中需要考虑次领头项，也解释了为什么累积量展开要比矩展开表现更好。

Figure 4-3 $R_{3/1} \equiv \langle v_{12}^3 \rangle / \langle v_{12} \rangle$ and $R_{4/2} \equiv \langle v_{12}^4 \rangle / \langle v_{12}^2 \rangle$. These two determine the relative importance of the next-to-leading order terms in the moment expansion. For the cumulant expansion, the corresponding quantities are $R_{3/1,c}$ and $R_{4/2,c}$ respectively. These results explain the necessity of including the next-to-leading terms in the generation function (and RSD). They also explain why the cumulant expansion is better than the moment expansion.

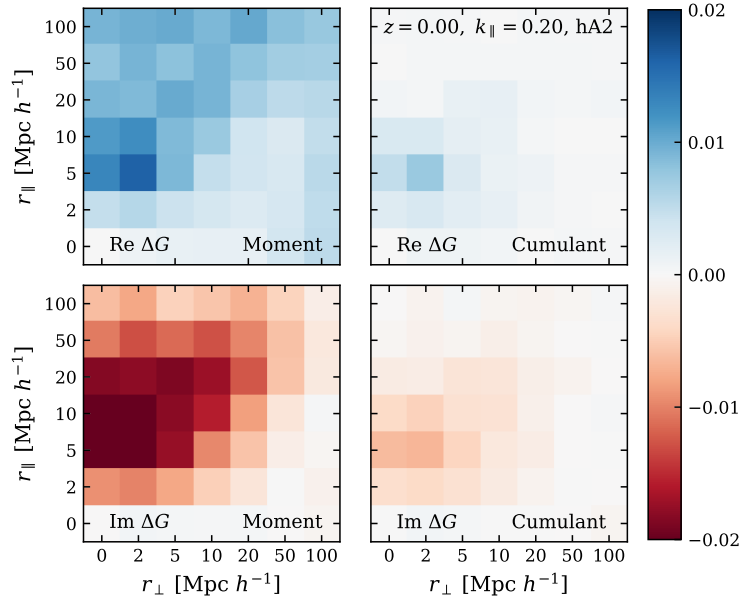


图 4-4 矩展开 (左侧)/累积量展开 (右侧) 计算得到的矩母函数与直接测量值的误差比较, 这里固定了 $k_{\parallel} = 0.2h/\text{Mpc}$ 。两种展开方式都保留至次领头项, 即包含所有 $k_{\parallel}^{1,2,3,4}$ 项。上下子图分别对应 G 的实部与虚部。对比结果清晰的展示了累积量展开要显著优于矩展开。对于位形空间中的所有 $r_{\perp}, r_{\parallel}$, 误差都满足 $|\Delta G| < 0.01$ 。为了简洁, 我们仅比较了红移 $z=0$ 时 A2 暗晕组的结果。对其他红移及其他质量的暗晕, 结果类似。

Figure 4-4 Accuracies of the moment expansion (left panels) and cumulant expansion (right panels) of the pairwise velocity generating function G at $k_{\parallel} = 0.2h/\text{Mpc}$. Both expansions keep the next-to-leading order terms, namely include all $k_{\parallel}^{1,2,3,4}$ terms. Top (bottom) panels are the results of real(imaginary) part of G . This comparison clearly shows that the cumulant expansion works significantly better than the moment expansion. It achieves $|\Delta G| < 0.01$ for all configurations of $r_{\perp}, r_{\parallel}$. For brevity, we only show the comparison for the halo mass bin A2 at $z=0$. Results of other mass bins and redshifts are similar.

5Mpc/h 及 $r_{\parallel} \sim 5\text{--}10\text{Mpc}/h$ 处，但是依然满足 $|\Delta G| \lesssim 0.01$ 。

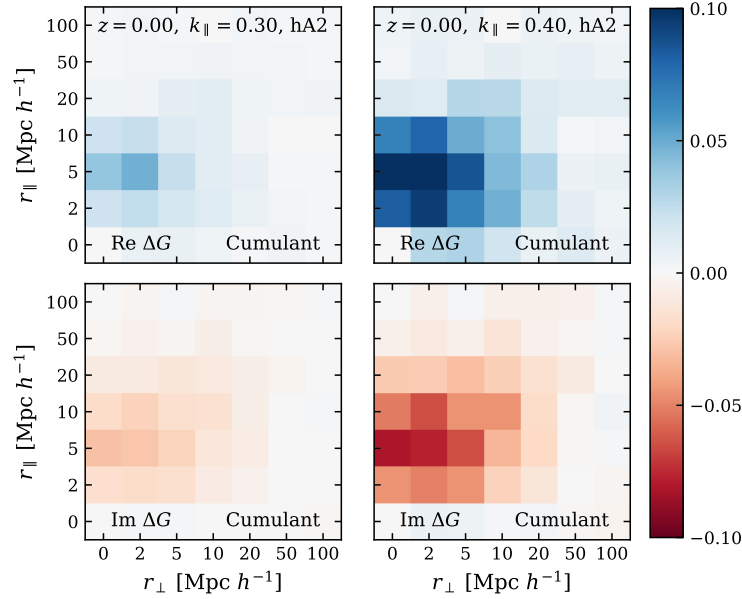


图 4-5 同图 4-4，但是对不同 $k_{\parallel}$ 时累积量展开对测量值的误差比较。这里分别选取了 $k_{\parallel} = 0.3h/\text{Mpc}$ 以及 $0.4h/\text{Mpc}$ 。

Figure 4-5 Similar to Fig. 4-4, but only for the cumulant expansion at two different $k_{\parallel} = 0.3h/\text{Mpc}$ and $0.4h/\text{Mpc}$.

图 4-5 展示了对于累积量展开，在 $k_{\parallel} = 0.3, 0.4h/\text{Mpc}$ 时的误差。如预期一样，误差随着 $k_{\parallel}$ 的增大而增大。与 $k_{\parallel} = 0.2h/\text{Mpc}$ 时的结果类似，最大的误差产生在 $r_{\perp} \lesssim 5\text{Mpc}/h$ and $r_{\parallel} \sim 5\text{--}10\text{Mpc}/h$ 处。对于 $k_{\parallel} = 0.4h/\text{Mpc}$ ， $\max|\Delta G| \sim 0.1$ 。虽然如此，如果我们仅使用 $r_{\perp} = 20\text{Mpc}/h$ 范围内的数据，那么 G 中的误差即使在 $k_{\parallel} = 0.4h/\text{Mpc}$ 的条件下也可以控制在 ~ 0.01 。图 4-6 展示了 A1 及 A3 组暗晕在 $k_{\parallel} = 0.2h/\text{Mpc}$ 时的误差，累积量展开的表现依然优秀。

4.3.3 对红移畸变模型误差的影响

上面的分析显示，在 $k \gtrsim 0.2h/\text{Mpc}$ 时，精确构建矩母函数要求必须包含三阶及四阶的成对速度矩或累积量。而矩母函数中的误差会传递到红移空间中的功率谱 $P^s(k_{\parallel}, k_{\perp})$ ，关联函数 $\xi^s(r_{\parallel}, r_{\perp})$ ，以及前文定义的混合空间中的统计量 $P^s(k_{\parallel}, r_{\perp})$ 。为了简便，这里我们只讨论矩母函数的误差对 $P^s(k_{\parallel}, r_{\perp})$ 的影响。

如果误差 ΔG 没有虚部，且不依赖 $r_{\perp}$ ，那么 $\Delta P^s = P^s(k_{\parallel} = 0, r_{\perp})\Delta G = w_p(r_{\perp})\Delta G$ 。既然累积量展开中 ΔG 的绝对值可以在 $k < 0.2h/\text{Mpc}$ 时控制在 < 0.01 ，那么导致 P^s 中的误差应该 $\lesssim 1\%$ 。但是真实的情况要更为复杂，因为 ΔG 实际上即

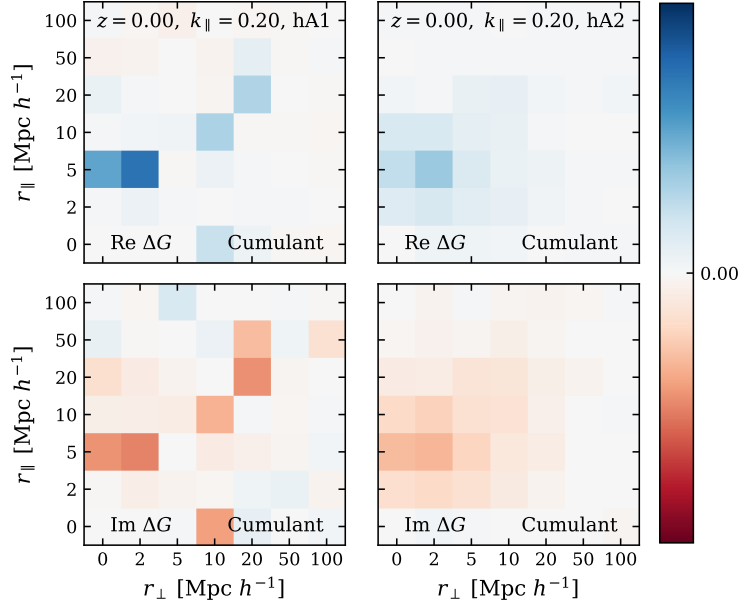


图 4-6 同图4-5，但是对两组不同质量暗晕 A1 组与 A3 组的比较，这里固定了 $k_{\parallel} = 0.2h/\text{Mpc}$ 。

Figure 4-6 Similar to Fig. 4-5, but for the two different halo catalogs A1 and A3 at fixed $k_{\parallel} = 0.2h/\text{Mpc}$.

存在虚部，且与 $r_{\parallel}$ 有关。因此，我们必须利用公式4-14进行数值积分来得到 P^s 的误差。然而，公式4-14中的积分是对振荡函数的积分。要在数值上精确量化 ΔP^s ，且好于 1%，这是一个巨大挑战。因此，我们这里仅展示 ΔG 给被积函数带来的误差。

统计量 $P^s(k_{\parallel}, r_{\perp})$ 是实数，

$$P^s(k_{\parallel}, r_{\perp}) = \int Q(k_{\parallel}, r_{\parallel}, r_{\perp}) dr_{\parallel} . \quad (4-31)$$

其中，被积函数

$$Q = [(1 + \xi(r))\text{Re}G(k_{\parallel}, r_{\parallel}, r_{\perp}) - 1] \cos(k_{\parallel} r_{\parallel}) - (1 + \xi(r))\text{Im}G(k_{\parallel}, r_{\parallel}, r_{\perp}) \sin(k_{\parallel} r_{\parallel}) . \quad (4-32)$$

图4-7展示了利用数值模拟算得的被积函数 Q ，以及由矩/累积量展开到 4 阶时，算得的被积函数及其误差 ΔQ 。因为 G 中的最大误差来自 $r_{\perp} \lesssim 10\text{Mpc}/h$ ，我们这里只展示 $r_{\perp} = 10, 20\text{Mpc}/h$ 时的结果。当 $k_{\parallel} = 0.2h/\text{Mpc}$ 时，在展开至 4 阶累积量 $\langle v_{12}^4 \rangle_c$ 的情况下，对大多数 $r_{\parallel}$ ， $|\Delta Q| \ll 0.01$ ，都有 $|\Delta Q| \ll 0.01$ 。作为对比，我们也展示了矩展开时的结果。可以看到，矩展开的误差远远大于累积量展开。

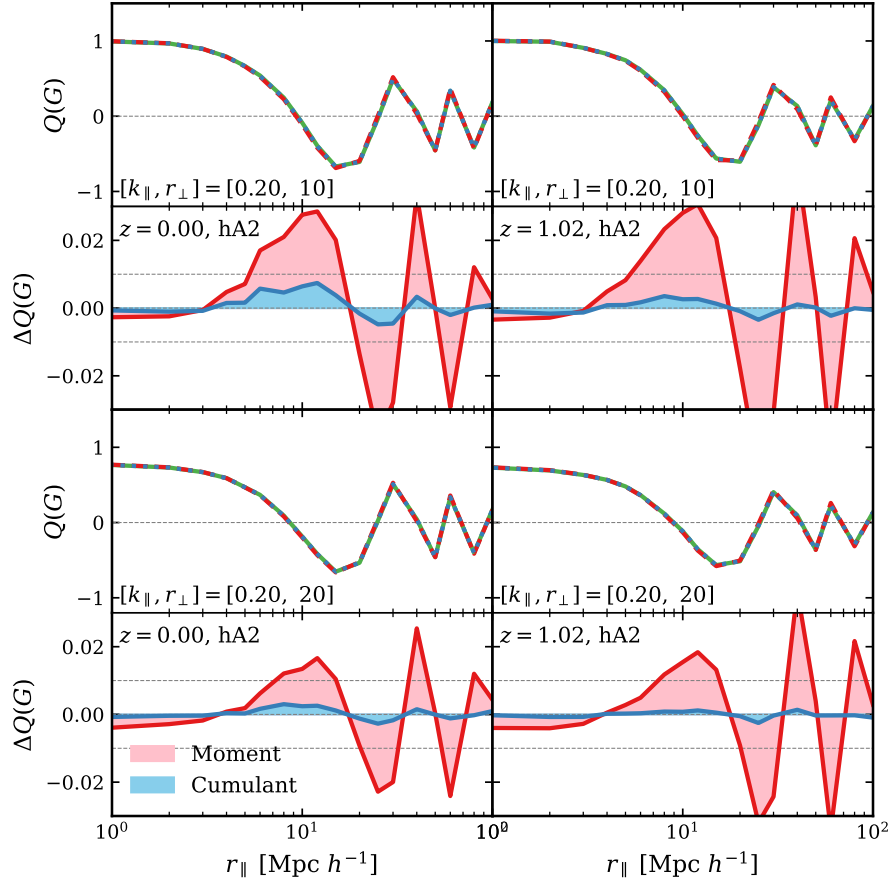


图 4-7 对统计量 P^s 误差的影响。上子图为红移 $z = 0$ 和 $z = 1$ 时，A2 组暗晕测量的被积函数。下子图为矩展开/累积量展开与直接测量值之间的残差。

Figure 4-7 *upper*: The integral kernel $Q(G)$ for halo set A2 at $z = 0$ (*l.h.s*) and $z = 1$ (*r.h.s*). *lower*: residuals for the two different approaches.

4.3.4 本动速度的分解

图4-8展示了 $z = 0$ 时, 利用 A1 与 A2 组暗晕验证公式4-24的结果。我们首先测量每组暗晕的速度弥散 σ_v , 之后考虑两种极端情况: 高斯分布极限 $\sigma_g = \sigma_v$ 以及指数分布极限 $\sigma_g = \sigma_v$ 。图中阴影区域的上下缘分别对应于高斯分布极限及指数分布极限。图中的数据点及误差棒为利用数值模拟直接测量的结果。在非线性区域, 即图中的蓝色与红色数据, 数据点趋近于指数分布极限。但是在相对线性的尺度 (如图中绿色数据所示), 因为尺度足够大 ($r_{\parallel} = 50 \text{ Mpc}/h$), 数据点趋近于高斯分布。上述结果说明成对速度概率分布函数极有可能是高斯分布与指数分布的混合, 与最初的假设吻合。在 $k \sim 0.2 h/\text{Mpc}$ 时, 高斯分布的假设已经不再适用, 这也与上述矩/累积量展开的结论一致。

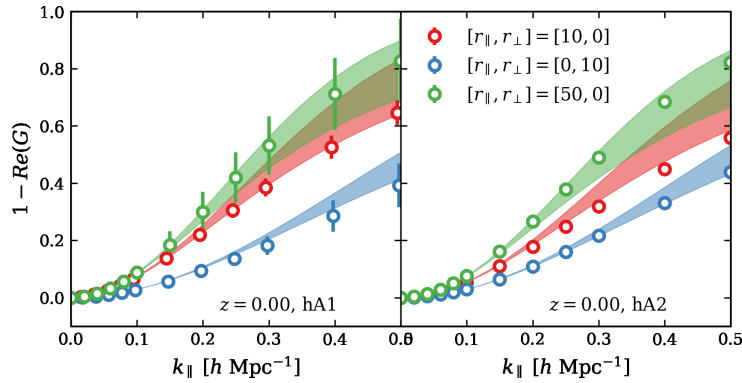


图 4-8 高斯/指数分布近似下的矩母函数。阴影部分的上缘为高斯分布极限近似

($\sigma_g^2 = \sigma^2, \sigma_g^2 = 0$), 下缘为指数分布极限近似 ($\sigma_g^2 = \sigma^2, \sigma_g^2 = 0$)。

Figure 4-8 Test for Eq. 4-24. The upper edge is Gaussian distribution limit ($\sigma_g^2 = \sigma^2, \sigma_g^2 = 0$), the lower edge is exponential distribution limit ($\sigma_g^2 = \sigma^2, \sigma_g^2 = 0$).

图4-9展示了 $z = 0$ 时, 利用 N 体数值模拟测量的暗物质速度功率谱, 以及根据速度分解得到的两个速度成分的功率谱。每种成分的行为与上文中的描述完全相符。密度关联成分在大尺度起主导作用, 随机成分随着尺度减小逐渐增大, 并在最后成为主导。图4-10是对公式4-28验证的结果。当 G^L 与 G^S 完全独立时, 实线 $\ln G^L + \ln G^S$ 与虚线 $\ln G$ 应当完全相等。而实际结果中存在的轻微偏差, 说明在密度关联成分与随机成分之间存在关联, 特别是在较小的尺度 (图中红色与蓝色数据)。

图4-11展示了 $z = 0$ 时, 利用 A3 组暗晕测得的 $\ln G^S$ 作为 $r_{\parallel}$ 的函数。这里固定了 $r_{\perp} = 0$ 。之所以展示 A3 的结果是因为对于小质量暗晕, 其随机运动更为剧烈, 因此随机成分要比 A1 与 A2 更加显著。结果显示, 随机成分几乎与尺度无关。

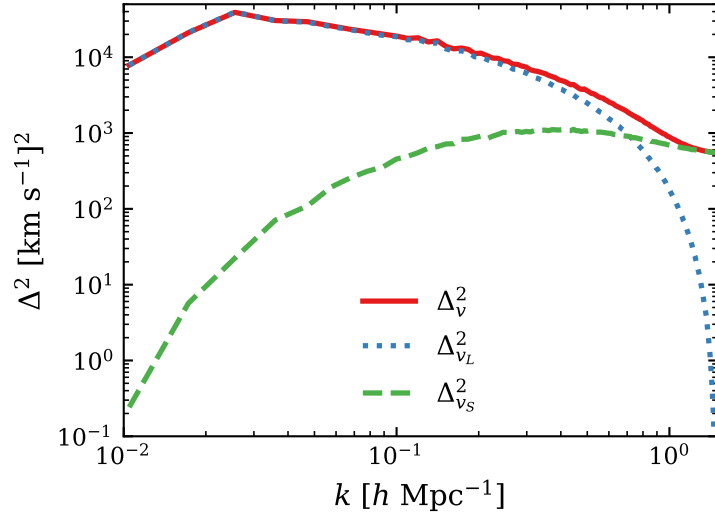


图 4-9 数值模拟中暗物质粒子本动速度，及分解后的密度关联成分和随机成分的功率谱。红移 $z = 0$ 。图中 $\Delta^2 = k^3 P(k)/(2\pi^2)$ 。

Figure 4-9 The dark matter power spectrum for peculiar velocity, deterministic component and stochastic component at $z = 0$. $\Delta^2 = k^3 P(k)/(2\pi^2)$.

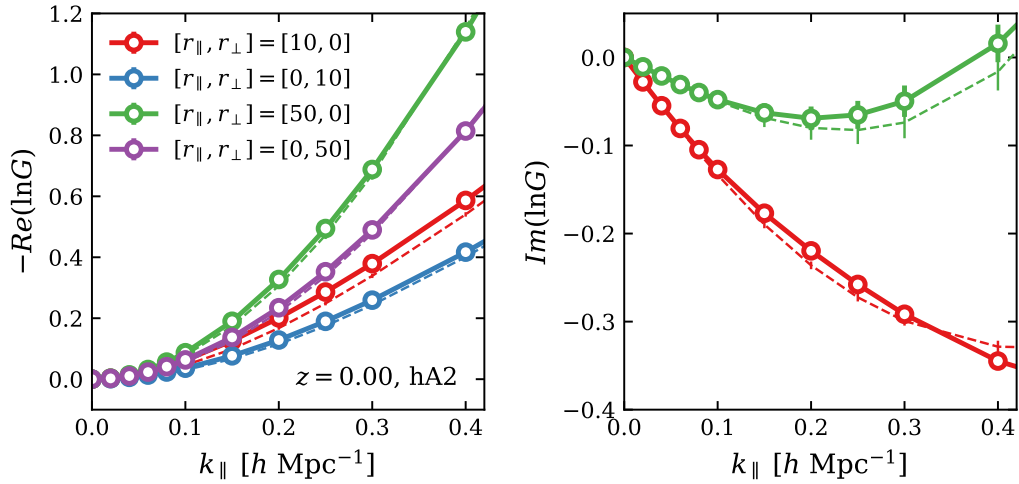


图 4-10 速度分解后重构的矩母函数。需要注意这里纵坐标不再是 G 而是 $\ln(G)$ 。实线及数据点为 $\ln G^L + \ln G^S$ ，其中， G^L 及 G^S 是利用速度分解方法后，数值模拟中的测量值。虚线是直接由数值模拟中计算得到的 $\ln G$ 。

Figure 4-10 Test for Eq. 4-28. Notice the vertical axis here is no longer about G but $\ln G$. The solid lines with data points are $\ln G^L + \ln G^S$, where G^L and G^S is measured from simulation using the velocity decomposition method. The dashed lines are $\ln G$ directly measured from simulation.

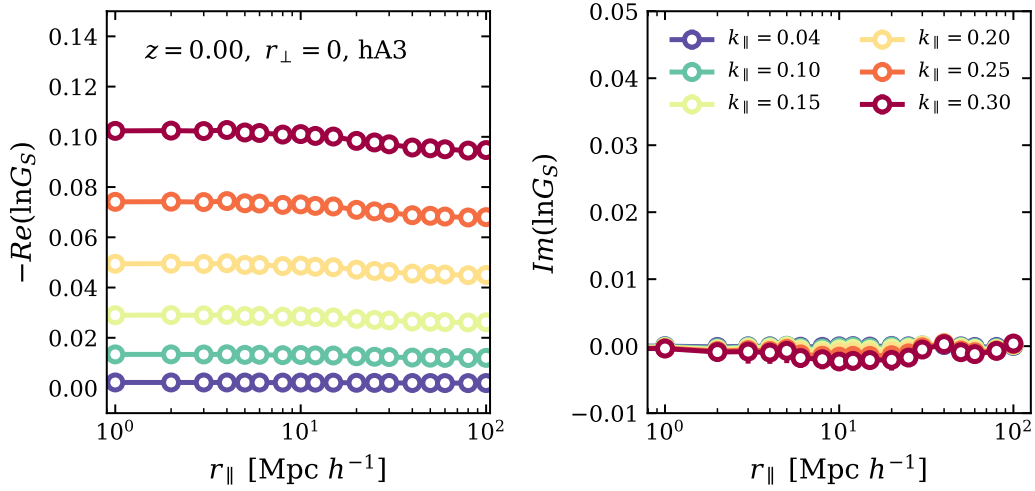


图 4-11 本动速度中随机成分的矩母函数。

Figure 4-11 The moment generating function for stochastic component.

随机成分的实部 $\text{Re}(\ln G_S)$ 由 $\langle v_{12,S}^m \rangle, m = 2, 4, 6, \dots$ 决定。由于不同两点 1 与 2 之间的随机成分不相关，因此尺度依赖的部分 $\langle v_{12,S}^m \rangle$ 不存在，剩下的仅为单点的自相关。 $\text{Re}(\ln G_S) \neq 0$ 说明在这种分解方式下，随机速度场中也存在高斯成分。对于虚部 $\text{Im}(\ln G_S)$ ，如预期一样，其不仅与尺度无关且数值 ~ 0 。

4.4 结论与讨论

在这个工作中，我们研究了矩母函数的两种展开方式：矩展开及累积量展开。我们发现：

1. 累积量展开在所有质量的暗晕以及所有红移中的表现都优于矩展开。
2. 在 $k < 0.1h/\text{Mpc}$ 的尺度，红移畸变模型中仅需包含 $n = 1, 2$ 阶的累积量。
3. 在 $k \sim 0.2h/\text{Mpc}$ 的尺度，必须考虑 $n = 1, 2, 3, 4$ 阶的累积量。当考虑了 $n = 1, 2, 3, 4$ 阶的矩或累积量时，在混合空间统计量 $P^s(k_{\parallel}, r_{\perp})$ 中，累积量展开远远好于矩展开。

本文对成对速度概率分布函数的研究表明，该概率分布函数极有可能是高斯分布与指数分布的混合。结果也进一步表明高斯流模型只在 $k < 0.1h/\text{Mpc}$ 的尺度上可以安全使用。在 $k \sim 0.2h/\text{Mpc}$ 的尺度上，基于成对速度概率分布函数 $p(v_{12})$ 的模型即不可以采用高斯分布假设，也不可以采用指数分布假设。进一步通过速度分解方法的研究还表明，速度场中的密度关联成分及随机成分之间在小尺度存在关联，而随机成分之中混合了高斯成分。

为了令我们这些发现可以应用于提升构建红移畸变模型的精度，后续仍有许多复杂的工作需要进一步进行研究。通过对矩母函数的研究，我们试图回答在精确构建红移畸变模型时，应该如何截取本动速度的统计量。另外，我们还研究了假设成对速度概率分布函数为高斯分布或指数分布时，计算矩母函数的合理性及可靠性。但是，对成对速度概率分布函数的理论理解在红移畸变宇宙学中一直是一个没有解决的难题，而这是正确建立宇宙学参数与展开系数 ($\langle v_{12} \rangle$ 与 $\langle v_{12} \rangle_c$) 之间理论关系的重要前提。另外，为了将我们的理论实际应用于观测数据，对混合空间中的统计量 $P^s(k_{\parallel}, r_{\perp})$ 需要进行完整的计算。而本文将研究重心主要聚焦在了成对速度的矩母函数上，只简单的比较了不同展开形式对被积函数误差的影响。公式4-14是对振荡函数的积分，当计算这类积分时，可以采用 FFTLog 方法^[177]。我们将在后续工作中进一步研究成对速度的概率分布函数，并完整计算 $P^s(k_{\parallel}, r_{\perp})$ 。

第五章 本动速度的机器学习及工作展望

红移畸变模型构建的难点均来源于各种非线性及非定域性问题。如第四章中,我们讨论了真实空间到红移空间的非线性且非定域性映射;第三章中,我们讨论了示踪体与暗物质间非线性关系中的速度偏袒问题;除上述两个难点,物质结构的非线性演化进一步加大了对红移畸变效应的理解难度。机器学习在解决复杂的非线性问题上具有突出的优势。因此,理论上可以运用机器学习方法直接从红移空间的关联函数或功率谱中提取本动速度的信息,进而限制宇宙学。在本章中,我们将从红移空间二维功率谱出发,运用深度学习直接得到本动速度的功率谱。

5.1 研究背景

5.1.1 机器学习简介

人工智能 (Artificial Intelligence) 作为一个专业性名词进入学术研究领域可以追溯至 1950 年代。当时机器学习作为一种训练人工智能的手段,经历了快速的发展,产生了感知器、神经网络等概念。到 1970 年代晚期,人工智能逐渐专注于数学、逻辑学等领域的研究,负责算法部分的机器学习被逐渐分离,发展成为一个独立的研究领域。自 1990 年代开始,得益于互联网的迅猛发展以及数字信息的大量积累,机器学习再次获得了繁荣。对机器学习的定义广泛引用自 Mitchell [178]中的一段话:

A computer program is said to learn from experience E with respect to some task T and some performance measure P , if its performance on T , as measured by P , improves with experience E

即,使计算机程序可以从经验中学习如何提升对某一任务的表现。

机器学习常被应用于以下几类问题:(1) 分类问题。分类问题的输出结果为“是,否”,“真,假”,或更多标签。(2) 异常检测。即分析某种模式中的异常变化,如检测银行账户中的风险交易等。(3) 回归问题。当输出结果为连续的数值时,通常为回归问题。(4) 聚类问题。聚类问题是指在无监督学习中,对数据进行学习并找出特征属性,最后聚合成类。(5) 强化问题。在强化学习中,输出的结果依赖之前的学习经验,程序通过“试错”提升未来表现,如著名的 AlphaGo。图5-1展示了机器学习的算法分类。其大致可以分为有监督学习,无监督学习,半监督学习,强

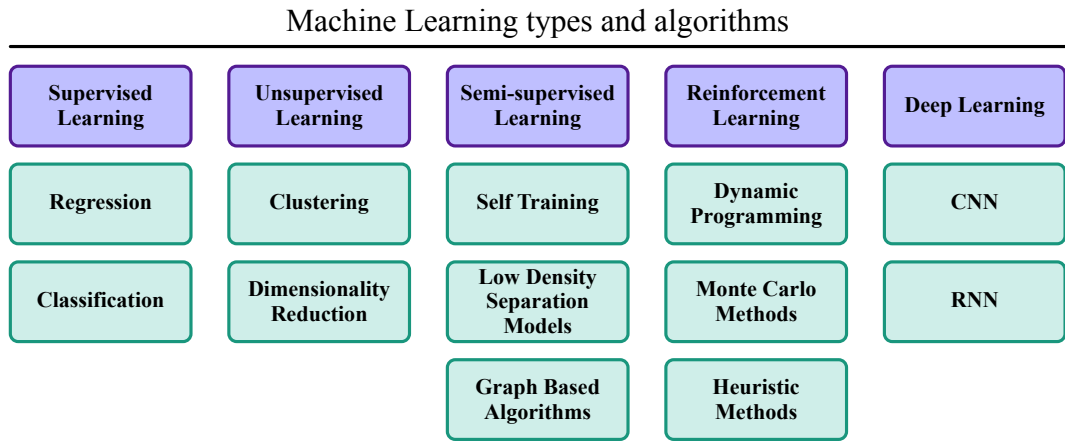


图 5-1 机器学习算法分类^[179]。

Figure 5-1 Types and algorithms of machine learning^[179].

化学习，和深度学习等。目前，深度学习是机器学习中最活跃的领域之一。所谓“深度”，是指在神经网络中拥有众多隐层。

如今，机器学习已经被应用于社会各个领域，如市场风险评估、自然语言处理、人脸识别、医学诊断等。在天文学领域，机器学习也获得了广泛的应用。例如，生成宇宙大尺度结构数值模拟（He et al. [62], Chen et al. [64], Xu et al. [180], Kodi Ramanah et al. [181], Alves de Oliveira et al. [182]）；生成暗晕、星系样本 mock（Rodríguez et al. [183], Kodi Ramanah et al. [184], Kasmanoff et al. [185]）；直接限制宇宙学参数（Ravanbakhsh et al. [186], Ntampaka et al. [187], Pan et al. [188]）等^①。在本章，我们试图利用机器学习，研究红移畸变中存在的非线性及非定域性问题。

5.1.2 红移畸变中的非线性与非定域问题

如前文所述，在红移畸变的模型构建中，主要的难点均与各种非线性及非定域性效应有关。首先是真实空间到红移空间的非线性与非定域性映射；其次是晚期结构演化的非线性；最后，作为物质场示踪的星系或暗晕等高度非线性结构与物质场本身存在复杂的偏袒关系。以上所有问题使得通过纯解析或纯统计方式，构建高精度的红移畸变模型十分困难。

想要充分发挥 DESI, PFS, Euclid 等第四代及第五代暗能量巡天项目的潜力，目前已知的各种红移畸变模型或者很难保证精度，或者由于涵盖的太多高阶统计使计算变得十分复杂甚至难以进行。例如，在第四章中我们指出，想要在 $k \sim 0.2h/\text{Mpc}$ 时达到 1% 的精度，红移畸变的模型至少需要保留至 4 阶本动速度

^① <https://github.com/georgestein/ml-in-cosmology>

的统计量。这表示在成对速度矩母函数中需要计算 6 阶统计量，其计算复杂程度将变得难以令人接受。深度学习通过连接多层神经网络，在处理复杂的非线性问题上具有显著的优势。这为解决上述问题提供了一种可能的途径。

5.2 研究方法

实际观测中，我们可以得到红移空间中星系的二维关联函数 $\xi_{gg}^s(r_\perp, r_\parallel)$ (图1-5)，或二维功率谱 $P_{gg}^s(k_\perp, k_\parallel)$ 。他们在红移空间中表现出的各向异性来源于星系的本动速度。而物质的本动速度直接反映了结构增长的快慢。得到物质本动速度的功率谱也就得到了结构增长率 $f\sigma_8$ 。因此，我们学习的目标是从星系的二维功率谱 $P_{gg}^s(k_\perp, k_\parallel)$ 中提取物质本动速度场的功率谱 $P_{\theta\theta}(k)$ 。其中， $\theta \equiv \nabla \cdot \mathbf{v}/(aH)$ 为本动速度的散度。

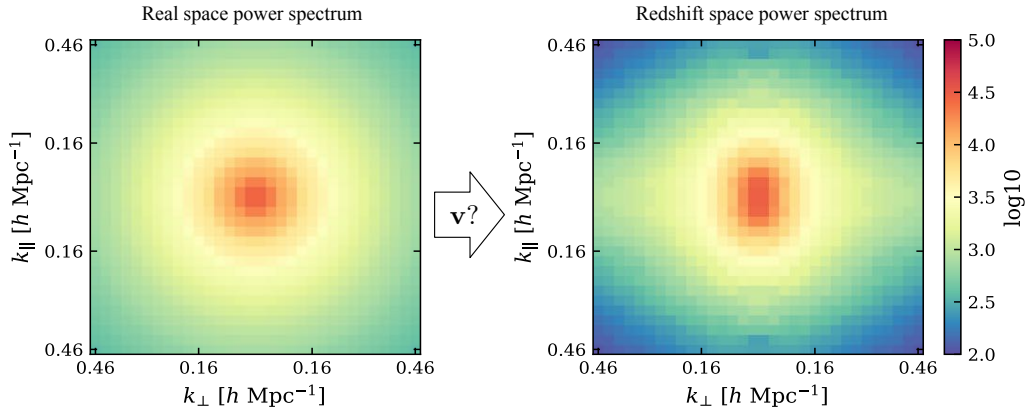


图 5-2 红移畸变中真实空间与红移空间物质功率谱的非线性非定域映射关系。红移 $z = 0$ 。

Figure 5-2 The non-linear and non-local mapping between real space and redshift space in RSD at redshift $z = 0$.

图5-2展示了红移畸变中真实空间与红移空间功率谱的非线性与非定域映射关系。左侧为真实空间功率谱，满足各向同性。右侧为红移空间功率谱。由于本动速度 $\mathbf{v}$ 的影响，红移空间的功率谱不再满足各向同性。从图中可以看出，由于 FoG 效应，功率谱沿视线方向在小尺度上被压低；而由于 Kaiser 效应，功率谱在大尺度上被增强。由于红移畸变仅影响视线方向，可以认为真实空间的功率谱 $P(|k|) = P(k_\perp) = P^s(k_\perp, k_\parallel = 0)$ 。因此，实际观测中，红移空间的功率谱 $P_{gg}^s(k_\perp, k_\parallel)$ 与真实空间中的功率谱 $P_{gg}(k)$ 均为已知量，二者的差异即由本动速度 $\mathbf{v}$ 决定。二维红移空间功率谱 $P_{gg}^s(k_\perp, k_\parallel)$ 与速度功率谱 $P_{\theta\theta}(k)$ 存在如下映射关系：

$$P_{\theta\theta}(k) = f_b(P_{gg}^s(k_\perp, k_\parallel)) . \quad (5-1)$$

其中, 参数 b 代表星系的偏袒。

我们通过训练一个条件生成对抗网络 (Conditional Generative Adversarial Network, CGAN), 试图找到映射 f_b 。

5.2.1 条件生成对抗网络

Goodfellow et al. [189]提出了生成对抗网络 (GAN), 可以显著减少神经网络的使用层数, 大大提升训练效率。GAN 的提出被认为是近年来机器学习领域的最重大的突破之一。随后, 在 GAN 的基础上人们发展出了众多衍生的网络结构, 形成了庞大的 GAN 家族^①。Mirza et al. [190]提出了条件生成对抗网络 (CGAN)。Isola et al. [191]利用条件生成网络发展了一套图像生成代码, pix2pix, 可以根据给定的特征生成对应的图像。Zhu et al. [192]改进了 pix2pix 的算法, 提出了 CycleGAN 网络。在不需要对图像进行成对匹配的情况下, 也可以生成指定的结果。本文基于对 pix2pix 的修改及优化, 使其可以应用于上文提出的红移畸变问题。

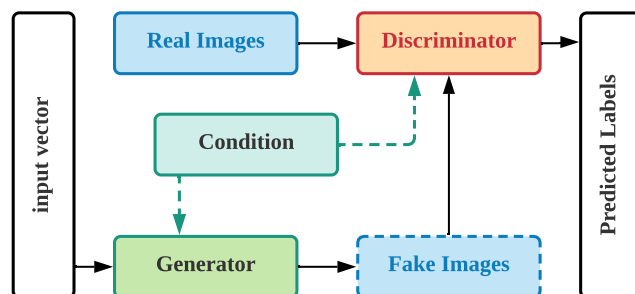


图 5-3 条件生成对抗网络结构。

Figure 5-3 Conditional Generative Adversarial Network.

图5-3展示了条件生成对抗网络的基本结构。GAN 主要由两个相互“对抗”的模块组成: 生成器 (Generator) 与判别器 (Discriminator)。生成器的作用是在给定一组随机向量 z 时, 生成对目标图像 x 的模拟 $G(z)$ 。判别器的作用是区分生成器的输出与训练集中真实图像之间的差异, 判断生成器的输出是否可以“以假乱真”。通过二者的相互“对抗”, 不断优化网络参数。GAN 的目标函数 (objective function) 可以表示为

$$\arg \min_G \max_D \mathcal{L}_{\text{GAN}}(G, D) = \mathbb{E}_x [\log D(x)] + \mathbb{E}_z [\log(1 - D(G(z)))] . \quad (5-2)$$

^① GAN 家族: <https://github.com/hindupuravinash/the-gan-zoo>

其中, $\arg \min/\max f(x)$ 表示: 当 $f(x)$ 取最小/最大值时, 求解参数 x 的值。 $\mathbb{E}$ 表示数学期望。 $D(x)$ 表示输入为 x 时判别器的输出。对判别器, 需要通过调节判别器参数, 令 $\mathbb{E}_x[\log D(x)] + \mathbb{E}_z[\log(1 - D(G(z)))]$ 最大化 ($\max_D$)。对生成器, 其训练目的则是固定判别器参数时, 通过调节生成器参数, 令 $\mathbb{E}_z[\log(1 - D(G(z)))]$ 最小化 ($\min_G$)。在实际训练生成器时, 通常不按照上述说明进行操作, 而是令 $\mathbb{E}_z[\log D(G(z))]$ 最大化。

如果给生成器与判别器提供额外的约束条件 y , 则可以很容易的将 GAN 扩展为条件生成对抗网络。此时, 目标函数变为

$$\arg \min_G \max_D \mathcal{L}_{\text{CGAN}}(G, D) = \mathbb{E}_{x,y}[\log D(x|y)] + \mathbb{E}_{z,y}[\log(1 - D(G(z|y)))] . \quad (5-3)$$

在我们的问题中, 约束条件为二维红移空间功率谱 $P^s(k_\perp, k_\parallel)$, 生成的输出为二维本动速度功率谱 $P_{\theta\theta}(k_\perp, k_\parallel)$ 。

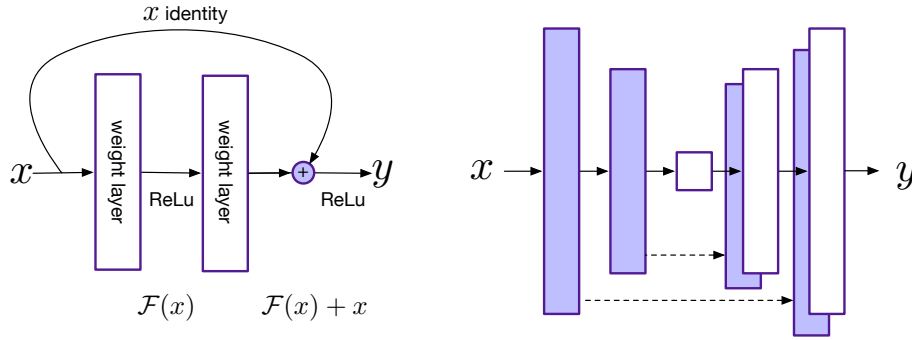


图 5-4 生成器的网络结构。左侧为 ResNet 的一个单元^[193], 右侧为 U-net^[194]。

Figure 5-4 The architectures of the generator. l.h.s is the ResNet^[193], r.h.s is the U-net^[194].

生成器与判别器需要独立构建网络结构。对于判别器, 我们采用简单的多层卷积神经网络 (CNN)。对于生成器, 我们尝试了两种不同的网络结构。图5-4展示了本文中采用的两种生成器网络结构, 分别为 ResNet^[193,195]及 U-net^[194]。

ResNet 在深度学习中, 传统的神经网络通过多层直接堆叠对目标函数进行拟合。每层的输入仅取决于上一层的输出。理论上, 随着网络深度的增加, 训练效果应当优于或至少与浅层网络持平。但实际操作中, 人们发现更深的网络在训练中出现了退化现象。为了缓解这一问题, He et al. [193]提出了残差网络 (ResNet) 结构。在 ResNet 中, ResNet 的一个单元学习的是特征与输入间的残差 $\mathcal{F}(x)$ 。当残差为 0 时, 单元为恒等映射, 保证了训练中不会出现退化现象。

U-net Ronneberger et al. [194]提出了用于医学图像分割的 U-net 网络结构。U-net 得名于其网络结构的形状。在数据集较小时具有一定优势。

从上面的分析可以看出，CGAN 的训练过程大致可以分为两步：

第一步，生成器生成图像 $G(z|y)$ ；判别器读取真实结果 $D(x|y)$ ；优化目标函数 $\arg \max_D \mathcal{L}_{\text{CGAN}}(G, D)$ 。

第二步，固定判别器的参数，训练生成器。在训练生成器时，不仅需要生成结果可以“骗过”判别器，还需要令生成结果逼近目标结果。因此，在生成器的目标函数中，需要另外叠加生成结果与目标结果的 L1 距离：

$$\mathcal{L}_{\text{L1}}(G) = \mathbb{E}_{x,y,z} [\|x - G(z|y)\|_1] . \quad (5-4)$$

此时，需要优化的目标函数变为 $\arg \min_G \max_D \mathcal{L}_{\text{CGAN}} + \lambda \mathcal{L}_{\text{L1}}(G)$ 。其中， λ 为表示 L1 权重的超参数（hyper parameter），设定 $\lambda = 100$ 。

之后，回到第一步，重复这个过程。经过反复迭代，直到目标函数收敛为止。

5.2.2 数值模拟

我们采用了两种数值模拟来生成数据集。

CosmicGrowth 数值模拟 我们使用了 12 组 CosmicGrowth 数值模拟。这 12 组数值模拟均采用了 WMAP 标准宇宙学参数。其中，两组为 J6411/6412。粒子数目 $N_p = 1024^3$ ，盒子大小为 1200Mpc/h。另外十组为 J6511-J6520，粒子数目 $N_p = 1024^3$ ，盒子大小为 600Mpc/h。在 J6411/6412 中，我们选取了 20 个红移，分别为 $z = [0.0, 0.086, 0.176, 0.274, 0.382, 0.501, 0.625, 0.762, 0.911, 1.074, 1.25, 1.45, 1.653, 1.879, 2.13, 2.411, 2.702, 3.02, 3.777, 4.668]$ 。在 J651-J6520 中，我们选取了 24 个红移，分别为 $z = [0.0, 0.054, 0.109, 0.168, 0.229, 0.295, 0.363, 0.435, 0.512, 0.591, 0.677, 0.764, 0.858, 0.957, 1.06, 1.17, 1.284, 1.406, 1.536, 1.67, 2.282, 3.479, 5.093, 7.295]$ 。

暗晕通过 FoF 算法得到。链长为 $b = 0.2$ 倍粒子平均距离。数据中剔除了非束缚粒子。我们将这些暗晕按照质量分为了三组，分别标记为 A1, A2, 以及 B（见表格 5-1）。另外，由于高红移处暗晕数密度过低，因此在红移 $z = [3.479, 5.093, 7.295]$ 处没有加入暗晕数据。

Gadget 数值模拟 除 CosmicGrowth 外，我们还使用了 100 组 Gadget 数值模拟。对 Gadget 数值模拟，我们选取了 11 个红移，分别为 $z = [0.0, 0.1, 0.3, 0.5,$

Set	Mass range
A1	$M_h > 10^{13} M_\odot/h$
A2	$10^{12} M_\odot/h < M_h < 10^{13} M_\odot/h$
B	$M_h > 10^{12} M_\odot/h$

表 5-1 CosmicGrowth 中三组不同质量的暗晕。

Table 5-1 Three halo sets with different mass ranges.

0.7, 0.9, 1.1, 1.3, 1.5, 1.7, 1.9]。其宇宙学参数以及模拟参数见表格5-2。我们仅使用 Gadget 数值模拟中的暗物质粒子数据。

parameter	physical meaning	value
A_s	amplitude of primordial (scalar) power spectrum	2.38×10^{-9}
Ω_m	present fractional matter density	0.3132
Ω_Λ	$1 - \Omega_m$	0.6868
Ω_b	present fractional baryon density	0.049
h	$H_0/(100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1})$	0.6731
n_s	primordial power spectral index	0.9655
σ_8	r.m.s. linear density fluctuation	0.829
N_ν	effective number of neutrino species	3.046
L_{box}	simulation box size	$1890 h/\text{Mpc}$
N_p	simulation particle number	1024^3
m_p	simulation particle mass	$5.46 \times 10^{11} h^{-1} M_\odot$
N_{snap}	number of output snapshots	13
z_{ini}	redshift when simulation starts	49.0
z_{final}	redshift when simulation finishes	0.0

表 5-2 Gadget 数值模拟参数。

Table 5-2 The parameters and technical specifications of the N-body simulations for Gadget simulations.

我们使用最近格点赋值的方法对格子进行赋值。在构建密度场时，对 J6411/6412 及 Gadget 数值模拟，我们采用了 1024^3 格点数；对 J6511-J6520，由于模拟体积更小，我们采用了 512^3 格点数。获得密度场后，我们使用快速傅立叶变换计算 2 维红移空间密度功率谱 $P^s(k_\perp, k_\parallel)$ 。之后在结果中减掉了 shot noise。对于每个数值模拟，都可以利用其 3 个独立方向获取 3 组计算结果。

对于速度功率谱 $P_{\theta\theta}(k)$ ，如第三章中所述，直接利用数值模拟进行计算会存在采样偏差。本章中，我们简化了问题，只考虑线性理论的计算结果。先由 CAMB 计算线性速度功率谱，然后将结果插值到二维图像。在计算二维红移空间功率谱以及速度功率谱时， $k_{\perp}$ 与 $k_{\parallel}$ 的起始点设置为 $k_{\min} = 0.0h/\text{Mpc}$ ，区间间隔 $\Delta k = 0.03h/\text{Mpc}$ 。共计算 $N_k = 16$ 个数据点，因此 $k_{\max} = 0.48h/\text{Mpc}$ 。

算得 16×16 的二维功率谱后，我们对其做两次镜像处理。最后得到 32×32 的二维数据。训练时，代码输入数据对 $[P_{\delta\delta}^s, P_{\theta\theta}]$ 。生成器的输入为红移空间密度场二维功率谱 $P_{\delta\delta}^s$ ，输出为二维速度功率谱 $\hat{P}_{\theta\theta}$ 。判别器对生成器的输出，与对应的线性速度功率谱 $P_{\theta\theta}$ 进行比较。

5.2.3 生成数据集

利用数值模拟直接计算的样本数量有限。对于我们想要研究的这个问题，可以通过对数值模拟进行简单的变换，获取更多的样本数据。具体方法如下：

1. 首先，我们可以重新标度每个粒子的速度。通过对每个粒子/暗晕的速度做线性变换 $v_{\parallel} \rightarrow (1+\epsilon)v_{\parallel}$ ，我们可以得到新的红移空间中粒子/暗晕分布。利用新的粒子分布计算得到的 2 维红移空间功率谱所对应的线性速度功率谱则变为 $(1+\epsilon)^2 P_{\theta\theta}$ 。因此，通过选取不同的 ϵ ，理论上我们可以得到无穷多的样本数据。本文选取了 10 个不同 ϵ 值，分别为 $\epsilon = [1.0, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.0, -0.2, -0.4, -0.6, -0.8]$ 。需要指出，当 $\epsilon = 0$ 时，对应初始的数值模拟结果。
2. 其次，我们可以在每个粒子/暗晕的速度上加上一个随机的小量 Δv 。如前文所述，由于加入的 Δv 足够小，因此只会对非线性尺度产生影响。此时，二维红移空间功率谱所对应的线性速度功率谱应当保持不变。我们运用该方法来训练神经网络对噪声的容忍程度。实际操作中，我们加入的噪声 v/aH 满足标准高斯分布 $\sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$ 。

结合以上两种方式，我们利用 J6511-J6520 生成了数目远大于数值模拟数目的样本数据。最后得到的样本分布见表格5-3。

5.3 结果及分析

我们使用 J6511-J6520 作为训练集，J6411/6412 与 Gadget 数值模拟结果作为测试集。分别在训练样本仅为暗物质时，以及包含暗晕时，对 CGAN 进行了训练。测试结果显示 ResNet 生成器与 U-net 生成器表现类似，因此，下文我们仅展示 ResNet 作为生成器时的结果。

CosmicGrowth	DM	set A1	set A2	set B
Simulation	712	660	690	690
Rescaled	6 600	6 300	6 300	-
Generated	6 600	6 300	6 300	6 300
Total	13 912	13 260	13 290	6 990

表 5-3 利用 J6511-J6520 生成的样本数目统计。

Table 5-3 Number of the generated samples from J6511-J6520.

5.3.1 训练样本为暗物质时的结果

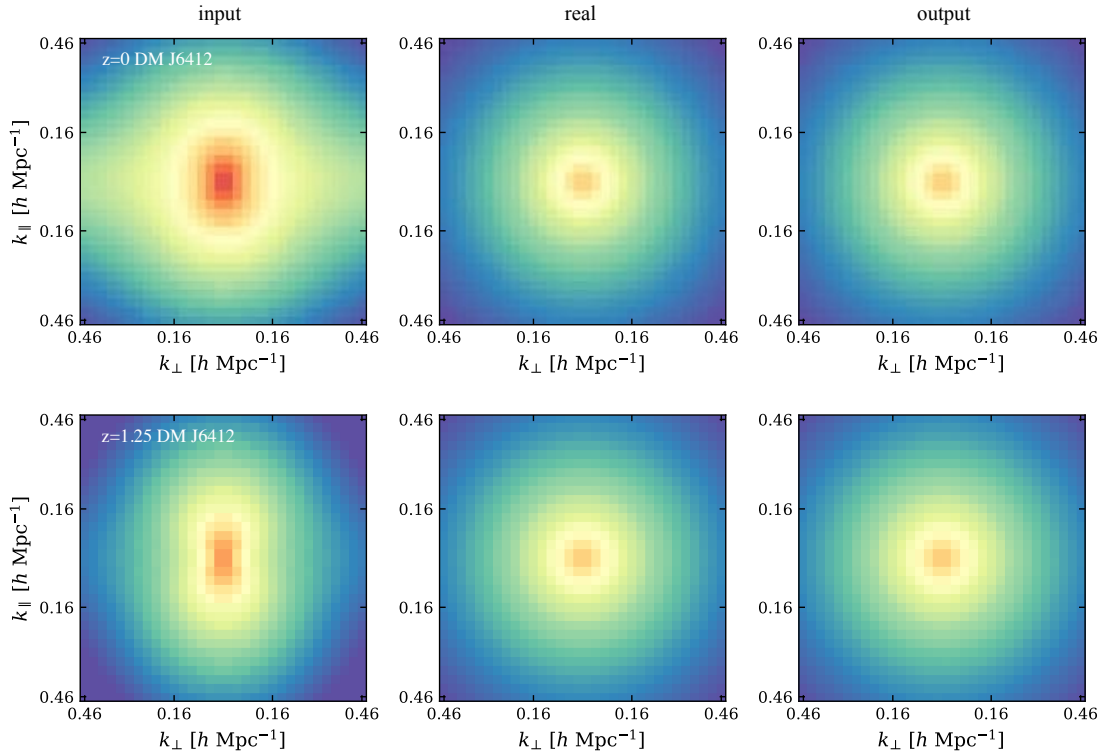


图 5-5 训练样本仅为暗物质时对 CosmicGrowth J6412 的测试结果。从左至右分别为二维红移空间功率谱，真实的本动速度功率谱，以及生成器输出的本动速度功率谱。上下两排子图分别对应红移 $z = 0$ 及 1.25。

Figure 5-5 The testing results for J6412. The training set only contains the power spectrum of dark matter. The top/bottom panels correspond to $z = 0$ and 1.25 respectively.

我们首先测试了训练样本仅为暗物质时的结果。图5-5及5-6展示了 J6412 及 Gadget 数值模拟测试结果的二维图像。从左至右分别为二维红移空间功率谱，真实的本动速度功率谱，以及生成器输出的本动速度功率谱。我们分别选取了两个

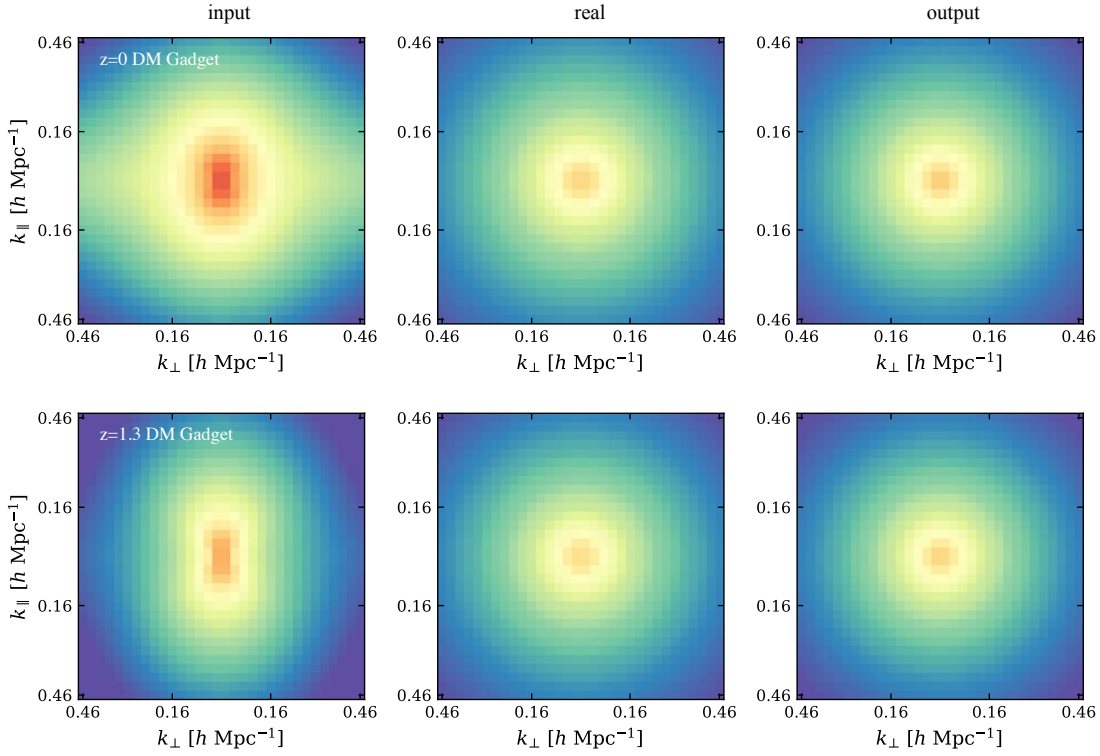


图 5-6 与图 5-5 类似，这里是对 Gadget 数值模拟的测试结果。上下两排子图分别对应红移 $z = 0$ 及 1.3。

Figure 5-6 Similar to 5-5 but for the testing results of Gadget simulation, and the top/bottom panels correspond to $z = 0$ and 1.3 respectively.

红移， $z = 0$ 以及 $z \sim 1.3$ 。本动速度功率谱应当各向同性。图 5-7 展示了将二维速度功率谱转换成一维后的结果。左侧为 J6412 中的测试结果，右侧为 Gadget 中的测试结果。实线为真值，虚线为生成器输出结果。从图中可以看到，模型对具有相同宇宙学参数的 J6412 表现的更好。而对 Gadget 数值模拟，存在振荡性的偏差。另外，对 J6412 的测试结果还显示，相较真实值，生成结果都抬高了功率谱的振幅，且提升幅度在各个尺度上基本持平。而对 Gadget 数值模拟，存在小尺度压低、大尺度抬高的现象。Gadget 数值模拟于 J6412 最大的区别是宇宙学不同。理论上，确定了物质的本动速度，那么其在红移空间中的投影也是确定的。映射 f_b 应当不依赖宇宙学。此外，不同红移处的数据以及我们生成数据集的方法理论上等价于不同宇宙学下的样本。其覆盖范围理论上已经超过了标准宇宙学的限定。理解这一点需要后续进一步的研究。

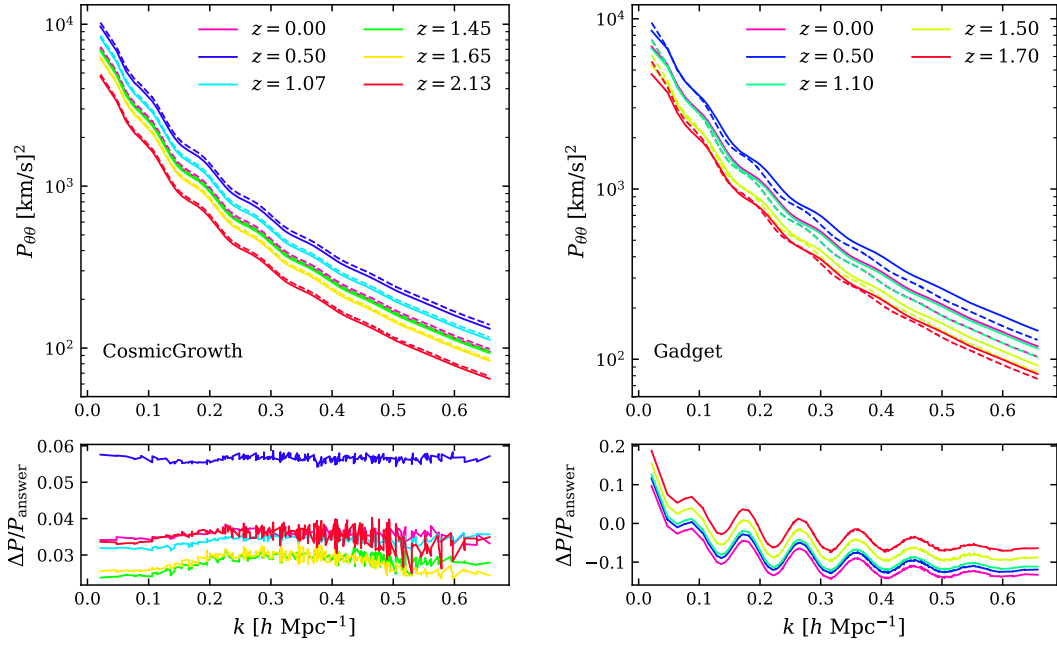


图 5-7 训练样本仅为暗物质时的测试结果。这里已经将二维的速度功率谱转换为了一维。左侧为 J6412 的测试结果，右侧为 Gadget 数值模拟的测试结果。我们选取了二者较为接近的几个红移。图中实线为真值，虚线为生成器输出结果。下子图为残差相对真值的大小。

Figure 5-7 The testing results for J6412 (left) and Gadget simulation (right). The training set only contains the power spectrum of dark matter. The 2 dimensional velocity power spectrums are converted to 1 dimensional results here. The solid lines are ground truth, and the dashed lines the generated results. The lower panel is the residual divided by the ground truth.

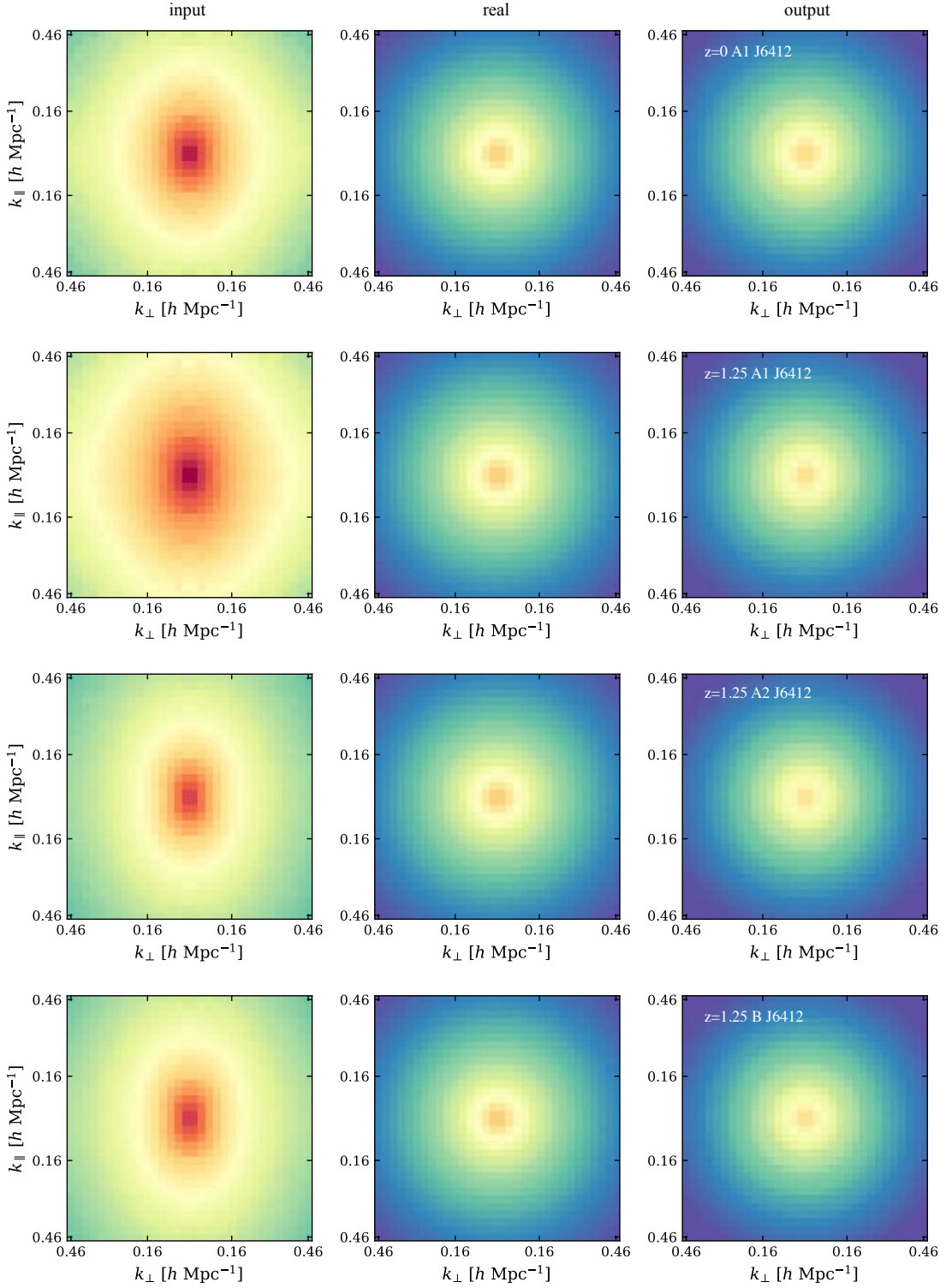


图 5-8 与图5-5类似。这里是对 Gadget J6412 中不同质量暗晕样本的测试结果。训练集包含了暗晕数据。由上至下分别对应不同的红移及暗晕分组。

Figure 5-8 Similar to 5-5. Here is the testing results for different halo sets of J6412. The training set contains both dark matter and halos. From top to bottom, the pannels correspond to different halo set and redshift.

5.3.2 训练样本为暗物质与暗晕时的结果

图5-8展示了包含暗晕数据时，在 J6412 不同质量暗晕样本中的测试结果。肉眼可见，对所有质量暗晕及红移，由暗晕所生成的速度场功率谱的振幅明显小于真实值。

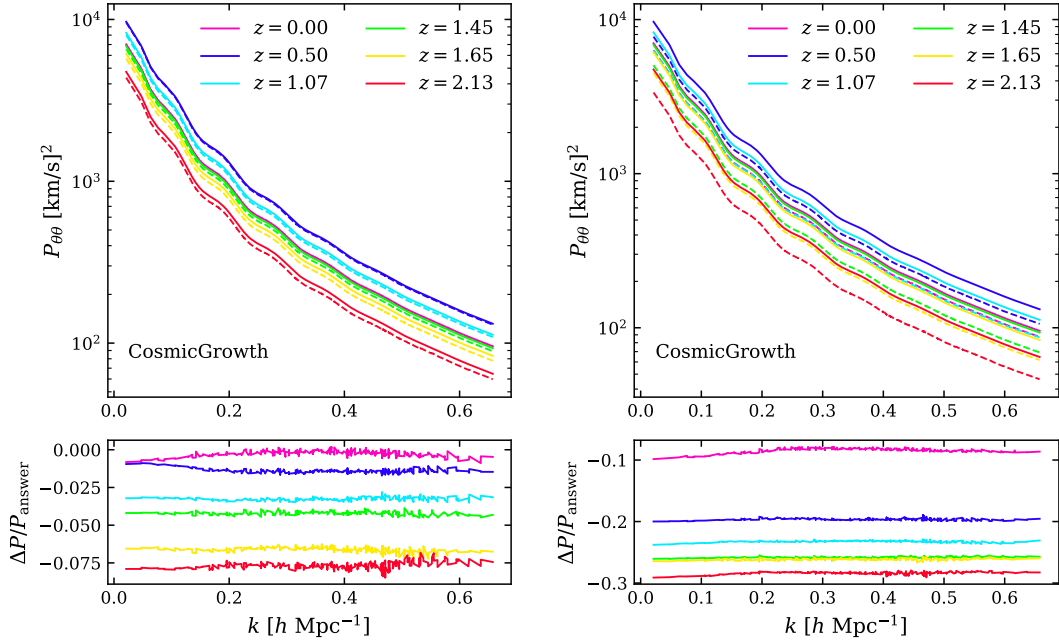


图 5-9 与图5-7类似，这里训练样本包含了暗物质数据。左侧为对 J6412 暗物质样本的测试结果，右侧为对 J6412 中 B 组暗晕样本的测试结果。对于 A1 及 A2 组暗晕样本，测试结果与 B 组暗晕类似。

Figure 5-9 Similar to 5-7. The training set contains both dark matter and halos. l.h.s is the testing results for J6412 dark matter. r.h.s is the testing results for J6412 halo set B. For halo set A1 and A2, the testing results are similar to halo set B.

图5-9展示了包含暗晕数据时在 J6412 的暗物质样本（左子图）及 B 组暗晕样本（右子图）的测试结果。当加入暗晕数据后，用 J6411 的暗物质样本进行测试时，结果与上节相反。在各个红移及尺度，生成器的输出结果都小于真值。对暗晕样本的测试也显示出同样的特征。

5.4 总结、展望与讨论

在这个工作中，我们使用条件生成对抗网络，试图从红移空间功率谱中直接学习本动速度功率谱。我们提出了快速生成数据集的一种方法，只依赖少量的数

值模拟，就可以产生大量样本数据。我们尝试在两种条件下训练 CGAN：(1) 只使用暗物质数据；(2) 使用所有暗物质及暗晕数据。在暗物质样本中的测试结果显示，当训练样本为 (1) 时，训练结果略好于训练样本为 (2) 时的情况。在训练样本为 (2) 时，对暗晕样本的测试结果显示，生成器会明显低估速度功率谱。

本文目前得到的只是初步的结果。在结果及分析部分中，我们已经讨论了若干可能存在的问题。后续我们将尝试的优化办法包括：

1. 高红移处数据天生匮乏，暗晕在高红移处没有数据加剧了这一问题。通过我们生成样本的手段，理论上可以弥补数据不平衡带来的影响，但实际上没有产生显著效果。后续我们将对训练集的分布进行量化，并研究其产生的影响。
2. 文章中密度场的功率谱与速度场的功率谱限制在了同一尺度。但理论上二者可以存在差异。
3. 目前的学习结果仅输出了速度场的线性功率谱。理论上我们可以同时对 $f\sigma_8$ 进行限制，从而同时给出结构增长率以及速度功率谱。未来的工作中，我们会尝试这种可能性。

全文总结

红移畸变通过测量结构增长率 $f\sigma_8$ 限制宇宙学，但是其理论模型的构建存在三个主要难点，(1) 真实空间与红移空间的非线性非定域性映射，(2) 暗物质场的非线性演化，以及 (3) 星系-暗物质的非线性关系。本文针对这三点做了如下工作。

首先，速度偏袒是红移畸变中系统误差的主要来源之一，而且一直以来，受困于采样偏差的影响，对速度偏袒的测量都不能达到理想精度。在此背景下，本文开创性的提出了一个新方法，构建了一个全新的统计量，消除了采样偏差以及 **cosmic variance** 的影响，第一次在数值模拟中精确测量了暗晕的速度偏袒。对多组不同暗晕的测量结果显示，除尺度依赖外，速度偏袒同时取决于暗晕的质量以及红移。在较大尺度 $k \leq 0.1h/\text{Mpc}$ 时，速度偏袒在 1% 以内，可以被忽略。而随着尺度减小，速度偏袒逐渐变得显著，对第四代巡天 **PFS**，**DESI** 等变得不再可以被忽略。

其次，基于真实空间到红移空间的映射关系由成对速度的矩母函数 G 所决定这一事实，本文对矩母函数的精确测量做了详细研究。本文利用数值模拟，分别使用矩展开与累积量展开两种方式，对 G 进行测量。结果显示，相比矩展开，累积量展开可以更快地使矩母函数收敛。要达到 **PFS**，**DESI** 等巡天的精度需求，在较大尺度 $k \leq 0.1h/\text{Mpc}$ 时，累积量展开中仅需包含至 2 阶速度统计量。而在较小尺度 $k \sim 0.2h/\text{Mpc}$ 时，无论使用矩展开还是累积量展开，都必须包含速度场的 4 阶统计。另外，本文进一步分析了成对速度概率分布函数的成分，分别采用高斯及指数分布两种形式，重构了成对速度的矩母函数。结果显示，成对速度概率分布函数可能为两种成分的混合，而高斯流模型的假设仅适用于 $k \leq 0.1h/\text{Mpc}$ 的尺度。

最后，本文尝试通过机器学习的手段，解决红移畸变效应中存在的各种非线性及非定域性问题。具体做法为，利用条件生成对抗网络 (**CGAN**)，从二维红移空间功率谱的图像中直接学习提取本动速度的功率谱。利用少量的数值模拟，通过重新标度暗物质粒子/暗晕的速度、加入速度微扰的手段，我们获得了大量不同红移处暗物质及多种质量暗晕的数据集。初步的训练结果显示，对暗物质样本的单独训练的结果优于包含暗晕样本时训练的结果。并且在低红移，机器学习的输出精度高于高红移时的结果。目前的训练结果并不理想，仍存在较大的系统误差，后续我们将进一步研究训练过程中可能存在的问题。

参考文献

- [1] Riess A G, Filippenko A V, Challis P, et al. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant[J]. AJ, 116(3): 1009-1038. arXiv: astro-ph/9805201 [astro-ph]. DOI: 10.1086/300499.
- [2] Perlmutter S, Aldering G, Goldhaber G, et al. Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae[J]. ApJ, 517(2): 565-586. arXiv: astro-ph/9812133 [astro-ph]. DOI: 10.1086/307221.
- [3] Spergel D N, Verde L, Peiris H V, et al. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters[J]. ApJS, 148(1): 175-194. arXiv: astro-ph/0302209 [astro-ph]. DOI: 10.1086/377226.
- [4] Hinshaw G, Larson D, Komatsu E, et al. Nine-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results[J]. ApJS, 208(2), 19: 19. arXiv: 1212.5226 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1088/0067-0049/208/2/19.
- [5] Ivanov M M, Simonović M, Zaldarriaga M. Cosmological parameters from the BOSS galaxy power spectrum[J]. J. Cosmology Astropart. Phys., 2020(5), 042: 042. arXiv: 1909.05277 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1088/1475-7516/2020/05/042.
- [6] Planck Collaboration, Aghanim N, Akrami Y, et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters[J]. A&A, 641, A6: A6. arXiv: 1807 . 06209 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1051/0004-6361/201833910.
- [7] Planck Collaboration, Ade P A R, Aghanim N, et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters[J]. A&A, 594, A13: A13. arXiv: 1502 . 01589 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1051/0004-6361/201525830.
- [8] Dodelson S. Modern cosmology[M].
- [9] Patrignani C, Particle Data Group, Agashe K, et al. Review of Particle Physics [J]. Chinese Physics C, 40(10), 100001: 100001. DOI: 10.1088/1674-1137/40/10/100001.
- [10] Peacock J A. Cosmological Physics[M].
- [11] Guth A H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness

- problems[J]. Phys. Rev. D, 23(2): 347-356. DOI: 10.1103/PhysRevD.23.347.
- [12] Linde A D. A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems[J]. Physics Letters B, 108(6): 389-393. DOI: 10.1016/0370-2693(82)91219-9.
- [13] McDonald J. Thermally Generated Gauge Singlet Scalars as Self-Interacting Dark Matter[J]. Phys. Rev. Lett., 88(9), 091304: 091304. arXiv: hep-ph/0106249 [hep-ph]. DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.091304.
- [14] Hall L J, Jedamzik K, March-Russell J, et al. Freeze-in production of FIMP dark matter[J]. Journal of High Energy Physics, 2010, 80: 80. arXiv: 0911.1120 [hep-ph]. DOI: 10.1007/JHEP03(2010)080.
- [15] Marsh D J E. Axion cosmology[J]. Phys. Rep., 643: 1-79. arXiv: 1510.07633 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1016/j.physrep.2016.06.005.
- [16] Bernal N, Heikinheimo M, Tenkanen T, et al. The dawn of FIMP Dark Matter: A review of models and constraints[J]. International Journal of Modern Physics A, 32(27), 1730023-274: 1730023-274. arXiv: 1706.07442 [hep-ph]. DOI: 10.1142/S0217751X1730023X.
- [17] Tenkanen T. Dark Matter from Scalar Field Fluctuations[J]. Phys. Rev. Lett., 123(6), 061302: 061302. arXiv: 1905.01214 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.061302.
- [18] Weinberg S. Universal Neutrino Degeneracy[J]. Physical Review, 128(3): 1457-1473. DOI: 10.1103/PhysRev.128.1457.
- [19] Ringwald A. Prospects for the direct detection of the cosmic neutrino background [J]. Nuclear Phys. A, 827(1-4): 501-506. arXiv: 0901.1529 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2009.05.109.
- [20] Betts S, Blanchard W R, Carnevale R H, et al. Development of a Relic Neutrino Detection Experiment at PTOLEMY: Princeton Tritium Observatory for Light, Early-Universe, Massive-Neutrino Yield[J]. arXiv e-prints, arXiv:1307.4738: arXiv:1307.4738. arXiv: 1307.4738 [astro-ph.IM].
- [21] Scott D, Rees M J. The 21-cm line at high redshift: a diagnostic for the origin of large scale structure[J]. MNRAS, 247: 510.
- [22] Subramanian K, Padmanabhan T. Neutral Hydrogen at High Redshifts as a Probe of Structure Formation - Part One - Post-Cobe Analysis of CDM and HDM Models[J]. MNRAS, 265: 101. DOI: 10.1093/mnras/265.1.101.

- [23] Weinberg D H, Mortonson M J, Eisenstein D J, et al. Observational probes of cosmic acceleration[J]. Phys. Rep., 530(2): 87-255. arXiv: 1201 . 2434 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1016/j.physrep.2013.05.001.
- [24] Weinberg S. The cosmological constant problem[J]. Reviews of Modern Physics, 61(1): 1-23. DOI: 10.1103/RevModPhys.61.1.
- [25] Zlatev I, Wang L, Steinhardt P J. Quintessence, Cosmic Coincidence, and the Cosmological Constant[J]. Phys. Rev. Lett., 82(5): 896-899. arXiv: astro-ph/9807002 [astro-ph]. DOI: 10.1103/PhysRevLett.82.896.
- [26] Ezquiaga J M, Zumalacárregui M. Dark Energy in light of Multi-Messenger Gravitational-Wave astronomy[J]. Frontiers in Astronomy and Space Sciences, 5, 44: 44. arXiv: 1807.09241 [astro-ph.CO]. DOI: 10.3389/fspas.2018.00044.
- [27] Cai Y F, Capozziello S, De Laurentis M, et al. $f(T)$ teleparallel gravity and cosmology[J]. Reports on Progress in Physics, 79(10), 106901: 106901. arXiv: 1511.07586 [gr-qc]. DOI: 10.1088/0034-4885/79/10/106901.
- [28] Harko T, Lobo F S N, Nojiri S, et al. $f(R,T)$ gravity[J]. Phys. Rev. D, 84(2), 024020: 024020. arXiv: 1104.2669 [gr-qc]. DOI: 10.1103/PhysRevD.84.024020.
- [29] Amendola L, Tsujikawa S. Dark Energy: Theory and Observations[M].
- [30] Frusciante N, Perenon L. Effective field theory of dark energy: A review[J]. Phys. Rep., 857: 1-63. arXiv: 1907.03150 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1016/j.physrep.2020.02.004.
- [31] Abbott B P, Abbott R, Abbott T D, et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger[J]. Phys. Rev. Lett., 116(6), 061102: 061102. arXiv: 1602.03837 [gr-qc]. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.061102.
- [32] Alpher R A, Bethe H, Gamow G. The Origin of Chemical Elements[J]. Physical Review, 73(7): 803-804. DOI: 10.1103/PhysRev.73.803.
- [33] Penzias A A, Wilson R W. A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s.[J]. ApJ, 142: 419-421. DOI: 10.1086/148307.
- [34] Dicke R H, Peebles P J E, Roll P G, et al. Cosmic Black-Body Radiation.[J]. ApJ, 142: 414-419. DOI: 10.1086/148306.
- [35] Planck Collaboration, Akrami Y, Ashdown M, et al. Planck 2018 results. IV. Diffuse component separation[J]. A&A, 641, A4: A4. arXiv: 1807 . 06208

- [astro-ph.CO]. DOI: 10.1051/0004-6361/201833881.
- [36] Sachs R K, Wolfe A M. Perturbations of a Cosmological Model and Angular Variations of the Microwave Background[J]. ApJ, 147: 73. DOI: 10.1086/148982.
- [37] Dupé F, Rassat A, Starck J, et al. Measuring the integrated Sachs-Wolfe effect[J]. A&A, 534, A51: A51. arXiv: 1010.2192 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1051/0004-6361/201015893.
- [38] Carlstrom J E, Holder G P, Reese E D. Cosmology with the Sunyaev-Zel'dovich Effect[J]. ARA&A, 40: 643-680. arXiv: astro-ph/0208192 [astro-ph]. DOI: 10.1146/annurev.astro.40.060401.093803.
- [39] de Bernardis P, Ade P A R, Bock J J, et al. A flat Universe from high-resolution maps of the cosmic microwave background radiation[J]. Nature, 404(6781): 955-959. arXiv: astro-ph/0004404 [astro-ph]. DOI: 10.1038/35010035.
- [40] Hou J, Sánchez A G, Ross A J, et al. The completed SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: BAO and RSD measurements from anisotropic clustering analysis of the quasar sample in configuration space between redshift 0.8 and 2.2[J]. MNRAS, 500(1): 1201-1221. arXiv: 2007.08998 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1093/mnras/staa3234.
- [41] Neveux R, Burtin E, de Mattia A, et al. The completed SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: BAO and RSD measurements from the anisotropic power spectrum of the quasar sample between redshift 0.8 and 2.2[J]. MNRAS, 499(1): 210-229. arXiv: 2007.08999 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1093/mnras/staa2780.
- [42] Alcock C, Paczynski B. An evolution free test for non-zero cosmological constant [J]. Nature, 281: 358. DOI: 10.1038/281358a0.
- [43] Hamilton A J S. Linear Redshift Distortions: a Review[M]//Hamilton D. The Evolving Universe: vol. 231: 185. DOI: 10.1007/978-94-011-4960-0_17.
- [44] Zhang P, Liguori M, Bean R, et al. Probing Gravity at Cosmological Scales by Measurements which Test the Relationship between Gravitational Lensing and Matter Overdensity[J]. Phys. Rev. Lett., 99(14), 141302: 141302. arXiv: 0704.1932 [astro-ph]. DOI: 10.1103/PhysRevLett.99.141302.
- [45] Lucy L B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis.[J]. AJ, 82: 1013-1024. DOI: 10.1086/112164.

-
- [46] Gingold R A, Monaghan J J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars.[J]. MNRAS, 181: 375-389. DOI: 10.1093/mnras/181.3.375.
- [47] Cen R, Ostriker J P. Where Are the Baryons? II. Feedback Effects[J]. ApJ, 650(2): 560-572. arXiv: astro-ph/0601008 [astro-ph]. DOI: 10.1086/506505.
- [48] Barnes J, Hut P. A hierarchical $O(N \log N)$ force-calculation algorithm[J]. Nature, 324(6096): 446-449. DOI: 10.1038/324446a0.
- [49] Hockney R W, Eastwood J W. Computer Simulation Using Particles[M].
- [50] Jing Y. CosmicGrowth Simulations—Cosmological simulations for structure growth studies[J]. Science China Physics, Mechanics, and Astronomy, 62(1), 19511: 19511. arXiv: 1807.06802 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1007/s11433-018-9286-x.
- [51] Springel V. The cosmological simulation code GADGET-2[J]. MNRAS, 364(4): 1105-1134. arXiv: astro-ph/0505010 [astro-ph]. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2005.09655.x.
- [52] Gunn J E, Gott I, J. Richard. On the Infall of Matter Into Clusters of Galaxies and Some Effects on Their Evolution[J]. ApJ, 176: 1. DOI: 10.1086/151605.
- [53] Fillmore J A, Goldreich P. Self-similar gravitational collapse in an expanding universe[J]. ApJ, 281: 1-8. DOI: 10.1086/162070.
- [54] Bertschinger E. Self-similar secondary infall and accretion in an Einstein-de Sitter universe[J]. ApJS, 58: 39-65. DOI: 10.1086/191028.
- [55] Press W H, Schechter P. Formation of Galaxies and Clusters of Galaxies by Self-Similar Gravitational Condensation[J]. ApJ, 187: 425-438. DOI: 10.1086/152650.
- [56] Sheth R K, Tormen G. Large-scale bias and the peak background split[J]. MNRAS, 308(1): 119-126. arXiv: astro-ph/9901122 [astro-ph]. DOI: 10.1046/j.1365-8711.1999.02692.x.
- [57] Jenkins A, Frenk C S, White S D M, et al. The mass function of dark matter haloes [J]. MNRAS, 321(2): 372-384. arXiv: astro-ph/0005260 [astro-ph]. DOI: 10.1046/j.1365-8711.2001.04029.x.
- [58] Tinker J, Kravtsov A V, Klypin A, et al. Toward a Halo Mass Function for Precision Cosmology: The Limits of Universality[J]. ApJ, 688(2): 709-728. arXiv: 0803.2706 [astro-ph]. DOI: 10.1086/591439.

-
- [59] Murray S G, Power C, Robotham A S G. HMFcalc: An online tool for calculating dark matter halo mass functions[J]. *Astronomy and Computing*, 3: 23-34. arXiv: 1306.6721 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1016/j.ascom.2013.11.001.
 - [60] Feng Y, Chu M Y, Seljak U, et al. FASTPM: a new scheme for fast simulations of dark matter and haloes[J]. *MNRAS*, 463(3): 2273-2286. arXiv: 1603.00476 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1093/mnras/stw2123.
 - [61] Tassev S, Zaldarriaga M, Eisenstein D J. Solving large scale structure in ten easy steps with COLA[J]. *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 2013(6), 036: 036. arXiv: 1301.0322 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1088/1475-7516/2013/06/036.
 - [62] He S, Li Y, Feng Y, et al. Learning to predict the cosmological structure formation[J]. *Proceedings of the National Academy of Science*, 116(28): 13825-13832. arXiv: 1811.06533 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1073/pnas.1821458116.
 - [63] Ntampaka M, Avestruz C, Boada S, et al. The Role of Machine Learning in the Next Decade of Cosmology[J]. *BAAS*, 51(3), 14: 14. arXiv: 1902.10159 [astro-ph.IM].
 - [64] Chen C, Li Y, Villaescusa-Navarro F, et al. Learning the Evolution of the Universe in N-body Simulations[J]. arXiv e-prints, arXiv:2012.05472: arXiv:2012.05472. arXiv: 2012.05472 [astro-ph.CO].
 - [65] Scoccimarro R. Redshift-space distortions, pairwise velocities, and nonlinearities[J]. *Phys. Rev. D*, 70(8), 083007: 083007. arXiv: astro - ph / 0407214 [astro-ph]. DOI: 10.1103/PhysRevD.70.083007.
 - [66] Taruya A, Nishimichi T, Saito S. Baryon acoustic oscillations in 2D: Modeling redshift-space power spectrum from perturbation theory[J]. *Phys. Rev. D*, 82(6), 063522: 063522. arXiv: 1006.0699 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1103/PhysRevD.82.063522.
 - [67] Taruya A, Hiramatsu T. A Closure Theory for Nonlinear Evolution of Cosmological Power Spectra[J]. *ApJ*, 674(2): 617-635. arXiv: 0708.1367 [astro-ph]. DOI: 10.1086/526515.
 - [68] Taruya A, Nishimichi T, Saito S, et al. Nonlinear evolution of baryon acoustic oscillations from improved perturbation theory in real and redshift spaces[J]. *Phys. Rev. D*, 80(12), 123503: 123503. arXiv: 0906.0507 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1103/PhysRevD.80.123503.
 - [69] Zheng Y, Song Y S. Study on the mapping of dark matter clustering from real

- space to redshift space[J]. *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 2016(8), 050:050. arXiv: 1603.00101 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1088/1475-7516/2016/08/050.
- [70] Zheng Y, Song Y S, Oh M. Study on the mapping of halo clustering from real space to redshift space[J]. *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 2019(6), 013:013. arXiv: 1807.08115 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1088/1475-7516/2019/06/013.
- [71] Seljak U, McDonald P. Distribution function approach to redshift space distortions[J]. *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 2011(11), 039:039. arXiv: 1109.1888 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1088/1475-7516/2011/11/039.
- [72] Okumura T, Seljak U, Desjacques V. Distribution function approach to redshift space distortions. Part III: halos and galaxies[J]. *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 2012(11), 014:014. arXiv: 1206.4070 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1088/1475-7516/2012/11/014.
- [73] Okumura T, Seljak U, McDonald P, et al. Distribution function approach to redshift space distortions. Part II: N-body simulations[J]. *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 2012(2), 010:010. arXiv: 1109.1609 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1088/1475-7516/2012/02/010.
- [74] Vlah Z, Seljak U, McDonald P, et al. Distribution function approach to redshift space distortions. Part IV: perturbation theory applied to dark matter [J]. *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 2012(11), 009:009. arXiv: 1207.0839 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1088/1475-7516/2012/11/009.
- [75] Vlah Z, Seljak U, Okumura T, et al. Distribution function approach to redshift space distortions. Part V: perturbation theory applied to dark matter halos[J]. *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 2013(10), 053:053. arXiv: 1308.6294 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1088/1475-7516/2013/10/053.
- [76] Peebles P J E. The large-scale structure of the universe[M].
- [77] Fisher K B. On the Validity of the Streaming Model for the Redshift-Space Correlation Function in the Linear Regime[J]. *ApJ*, 448: 494. arXiv: astro-ph/9412081 [astro-ph]. DOI: 10.1086/175980.
- [78] Reid B A, White M. Towards an accurate model of the redshift-space clustering of haloes in the quasi-linear regime[J]. *MNRAS*, 417(3): 1913-1927. arXiv: 1105.4165 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2011.19379.x.

-
- [79] Kaiser N. Clustering in real space and in redshift space[J]. MNRAS, 227: 1-21. DOI: 10.1093/mnras/227.1.1.
 - [80] Hamilton A J S. Measuring Omega and the Real Correlation Function from the Redshift Correlation Function[J]. ApJ, 385: L5. DOI: 10.1086/186264.
 - [81] McGill C. The redshift projection. I - Caustics and correlation functions[J]. MNRAS, 242: 428-438. DOI: 10.1093/mnras/242.3.428.
 - [82] Matsubara T. Nonlinear perturbation theory with halo bias and redshift-space distortions via the Lagrangian picture[J]. Phys. Rev. D, 78(8), 083519:083519. arXiv: 0807.1733 [astro-ph]. DOI: 10.1103/PhysRevD.78.083519.
 - [83] Bianchi D, Chiesa M, Guzzo L. Improving the modelling of redshift-space distortions - I. A bivariate Gaussian description for the galaxy pairwise velocity distributions[J]. MNRAS, 446(1): 75-84. arXiv: 1407.4753 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1093/mnras/stu2080.
 - [84] Cuesta-Lazaro C, Li B, Eggemeier A, et al. Towards a non-Gaussian model of redshift space distortions[J]. MNRAS, 498(1): 1175-1193. arXiv: 2002.02683 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1093/mnras/staa2249.
 - [85] Desjacques V, Jeong D, Schmidt F. Large-scale galaxy bias[J]. Phys. Rep., 733: 1-193. arXiv: 1611.09787 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1016/j.physrep.2017.12.002.
 - [86] Tinker J L. Redshift-space distortions with the halo occupation distribution - II. Analytic model[J]. MNRAS, 374(2): 477-492. arXiv: astro - ph / 0604217 [astro-ph]. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2006.11157.x.
 - [87] Zhang P, Pan J, Zheng Y. Peculiar velocity decomposition, redshift space distortion, and velocity reconstruction in redshift surveys: The methodology[J]. Phys. Rev. D, 87(6), 063526:063526. arXiv: 1207.2722 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1103/PhysRevD.87.063526.
 - [88] Kuruvilla J, Porciani C. On the streaming model for redshift-space distortions[J]. MNRAS, 479(2): 2256-2276. arXiv: 1710.09379 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1093/mnras/sty1654.
 - [89] Lewandowski M, Senatore L, Prada F, et al. EFT of large scale structures in redshift space[J]. Phys. Rev. D, 97(6), 063526:063526. arXiv: 1512.06831 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1103/PhysRevD.97.063526.
 - [90] Vlah Z, White M. Exploring redshift-space distortions in large-scale structure

- [J]. *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 2019(3), 007:007. arXiv: 1812 . 02775 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1088/1475-7516/2019/03/007.
- [91] Pons-Bordería M J, Martínez V J, Stoyan D, et al. Comparing Estimators of the Galaxy Correlation Function[J]. *ApJ*, 523(2): 480-491. arXiv: astro-ph/9906344 [astro-ph]. DOI: 10.1086/307754.
- [92] Kerscher M, Szapudi I, Szalay A S. A Comparison of Estimators for the Two-Point Correlation Function[J]. *ApJ*, 535(1): L13-L16. arXiv: astro-ph/9912088 [astro-ph]. DOI: 10.1086/312702.
- [93] Davis M, Peebles P J E. A survey of galaxy redshifts. V. The two-point position and velocity correlations.[J]. *ApJ*, 267: 465-482. DOI: 10.1086/160884.
- [94] Peacock J A, Cole S, Norberg P, et al. A measurement of the cosmological mass density from clustering in the 2dF Galaxy Redshift Survey[J]. *Nature*, 410(6825): 169-173. arXiv: astro-ph/0103143 [astro-ph].
- [95] Guzzo L, Pierleoni M, Meneux B, et al. A test of the nature of cosmic acceleration using galaxy redshift distortions[J]. *Nature*, 451(7178): 541-544. arXiv: 0802.1944 [astro-ph]. DOI: 10.1038/nature06555.
- [96] Beutler F, Blake C, Colless M, et al. The 6dF Galaxy Survey: baryon acoustic oscillations and the local Hubble constant[J]. *MNRAS*, 416(4): 3017-3032. arXiv: 1106.3366 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2011.19250.x.
- [97] Beutler F, Blake C, Colless M, et al. The 6dF Galaxy Survey: $z \approx 0$ measurements of the growth rate and σ_8 [J]. *MNRAS*, 423(4): 3430-3444. arXiv: 1204.4725 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2012.21136.x.
- [98] Tegmark M, Eisenstein D J, Strauss M A, et al. Cosmological constraints from the SDSS luminous red galaxies[J]. *Phys. Rev. D*, 74(12), 123507: 123507. arXiv: astro-ph/0608632 [astro-ph]. DOI: 10.1103/PhysRevD.74.123507.
- [99] Samushia L, Percival W J, Raccanelli A. Interpreting large-scale redshift-space distortion measurements[J]. *MNRAS*, 420(3): 2102-2119. arXiv: 1102 . 1014 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2011.20169.x.
- [100] Alam S, Ata M, Bailey S, et al. The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: cosmological analysis of the DR12 galaxy sample[J]. *MNRAS*, 470(3): 2617-2652. arXiv: 1607.03155 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1093/mnras/stx721.
- [101] Gil-Marín H, Guy J, Zarrouk P, et al. The clustering of the SDSS-IV ex-

- tended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey DR14 quasar sample: structure growth rate measurement from the anisotropic quasar power spectrum in the redshift range $0.8 < z < 2.2$ [J]. MNRAS, 477(2): 1604-1638. arXiv: 1801.02689 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1093/mnras/sty453.
- [102] Bautista J E, Paviot R, Vargas Magaña M, et al. The completed SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: measurement of the BAO and growth rate of structure of the luminous red galaxy sample from the anisotropic correlation function between redshifts 0.6 and 1[J]. MNRAS, 500(1): 736-762. arXiv: 2007.08993 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1093/mnras/staa2800.
- [103] de Mattia A, Ruhlmann-Kleider V, Raichoor A, et al. The completed SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: measurement of the BAO and growth rate of structure of the emission line galaxy sample from the anisotropic power spectrum between redshift 0.6 and 1.1[J]. MNRAS, 501(4): 5616-5645. arXiv: 2007.09008 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1093/mnras/staa3891.
- [104] Tamone A, Raichoor A, Zhao C, et al. The completed SDSS-IV extended baryon oscillation spectroscopic survey: growth rate of structure measurement from anisotropic clustering analysis in configuration space between redshift 0.6 and 1.1 for the emission-line galaxy sample[J]. MNRAS, 499(4): 5527-5546. arXiv: 2007.09009 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1093/mnras/staa3050.
- [105] Hawkins E, Maddox S, Cole S, et al. The 2dF Galaxy Redshift Survey: correlation functions, peculiar velocities and the matter density of the Universe[J]. MNRAS, 346(1): 78-96. arXiv: astro-ph/0212375 [astro-ph]. DOI: 10.1046/j.1365-2966.2003.07063.x.
- [106] Percival W J, Burkey D, Heavens A, et al. The 2dF Galaxy Redshift Survey: spherical harmonics analysis of fluctuations in the final catalogue[J]. MNRAS, 353(4): 1201-1218. arXiv: astro-ph/0406513 [astro-ph]. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2004.08146.x.
- [107] Blake C, Brough S, Colless M, et al. The WiggleZ Dark Energy Survey: the growth rate of cosmic structure since redshift $z=0.9$ [J]. MNRAS, 415(3): 2876-2891. arXiv: 1104.2948 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2011.18903.x.
- [108] Okumura T, Hikage C, Totani T, et al. The Subaru FMOS galaxy redshift survey (FastSound). IV. New constraint on gravity theory from redshift space distortions

- at $z \sim 1.4$ [J]. PASJ, 68(3), 38: 38. arXiv: 1511.08083 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1093/pasj/psw029.
- [109] Blake C, Baldry I K, Bland-Hawthorn J, et al. Galaxy And Mass Assembly (GAMA): improved cosmic growth measurements using multiple tracers of large-scale structure[J]. MNRAS, 436(4): 3089-3105. arXiv: 1309 . 5556 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1093/mnras/stt1791.
- [110] Simpson F, Blake C, Peacock J A, et al. Galaxy and mass assembly: Redshift space distortions from the clipped galaxy field[J]. Phys. Rev. D, 93(2), 023525: 023525. arXiv: 1505.03865 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1103/PhysRevD.93.023525.
- [111] de la Torre S, Jullo E, Giocoli C, et al. The VIMOS Public Extragalactic Redshift Survey (VIPERS). Gravity test from the combination of redshift-space distortions and galaxy-galaxy lensing at $0.5 < z < 1.2$ [J]. A&A, 608, A44: A44. arXiv: 1612 .05647 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1051/0004-6361/201630276.
- [112] Mohammad F G, Granett B R, Guzzo L, et al. The VIMOS Public Extragalactic Redshift Survey (VIPERS). An unbiased estimate of the growth rate of structure at $z = 0.85$ using the clustering of luminous blue galaxies[J]. A&A, 610, A59: A59. arXiv: 1708.00026 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1051/0004-6361/201731685.
- [113] Oka A, Saito S, Nishimichi T, et al. Simultaneous constraints on the growth of structure and cosmic expansion from the multipole power spectra of the SDSS DR7 LRG sample[J]. MNRAS, 439(3): 2515-2530. arXiv: 1310 . 2820 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1093/mnras/stu111.
- [114] Howlett C, Ross A J, Samushia L, et al. The clustering of the SDSS main galaxy sample - II. Mock galaxy catalogues and a measurement of the growth of structure from redshift space distortions at $z = 0.15$ [J]. MNRAS, 449(1): 848-866. arXiv: 1409.3238 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1093/mnras/stu2693.
- [115] Gil-Marín H, Bautista J E, Paviot R, et al. The Completed SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: measurement of the BAO and growth rate of structure of the luminous red galaxy sample from the anisotropic power spectrum between redshifts 0.6 and 1.0[J]. MNRAS, 498(2): 2492-2531. arXiv: 2007.08994 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1093/mnras/staa2455.
- [116] DESI Collaboration, Aghamousa A, Aguilar J, et al. The DESI Experiment Part

- I: Science, Targeting, and Survey Design[J]. arXiv e-prints, arXiv:1611.00036: arXiv:1611.00036. arXiv: 1611.00036 [astro-ph.IM].
- [117] Takada M, Ellis R S, Chiba M, et al. Extragalactic science, cosmology, and Galactic archaeology with the Subaru Prime Focus Spectrograph[J]. PASJ, 66(1), R1: R1. arXiv: 1206.0737 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1093/pasj/pst019.
- [118] Laureijs R, Amiaux J, Arduini S, et al. Euclid Definition Study Report [J]. arXiv e-prints, arXiv:1110.3193: arXiv:1110.3193. arXiv: 1110 . 3193 [astro-ph.CO].
- [119] Gong Y, Liu X, Cao Y, et al. Cosmology from the Chinese Space Station Optical Survey (CSS-OS)[J]. ApJ, 883(2), 203:203. arXiv: 1901 . 04634 [astro-ph.CO]. DOI: 10.3847/1538-4357/ab391e.
- [120] Bardeen J M, Bond J R, Kaiser N, et al. The Statistics of Peaks of Gaussian Random Fields[J]. ApJ, 304: 15. DOI: 10.1086/164143.
- [121] Desjacques V, Sheth R K. Redshift space correlations and scale-dependent stochastic biasing of density peaks[J]. Phys. Rev. D, 81(2), 023526:023526. arXiv: 0909.4544 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1103/PhysRevD.81.023526.
- [122] Elia A, Ludlow A D, Porciani C. The spatial and velocity bias of linear density peaks and protohaloes in the Λ cold dark matter cosmology[J]. MNRAS, 421(4): 3472-3480. arXiv: 1111.4211 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2012.20572.x.
- [123] Chan K C, Scoccimarro R, Sheth R K. Gravity and large-scale nonlocal bias[J]. Phys. Rev. D, 85(8), 083509:083509. arXiv: 1201.3614 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1103/PhysRevD.85.083509.
- [124] Baldauf T, Desjacques V, Seljak U. Velocity bias in the distribution of dark matter halos[J]. Phys. Rev. D, 92(12), 123507:123507. arXiv: 1405 . 5885 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1103/PhysRevD.92.123507.
- [125] Chan K C. Halo profile evolution and velocity bias[J]. Phys. Rev. D, 92(12), 123525:123525. arXiv: 1507.04753 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1103/PhysRevD.92.123525.
- [126] Colberg J M, White S D M, MacFarland T J, et al. Peculiar velocities of galaxy clusters[J]. MNRAS, 313(2): 229-236. DOI: 10.1046/j.1365-8711.2000.03265.x.
- [127] Howlett C, Staveley-Smith L, Blake C. Cosmological forecasts for combined and next-generation peculiar velocity surveys[J]. MNRAS, 464(3): 2517-2544. arXiv:

- 1609.08247 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1093/mnras/stw2466.
- [128] Schlegel D, Abdalla F, Abraham T, et al. The BigBOSS Experiment [J]. arXiv e-prints, arXiv:1106.1706:arXiv:1106.1706. arXiv: 1106 . 1706 [astro-ph.IM].
- [129] Abdalla F B, Bull P, Camera S, et al. Cosmology from HI galaxy surveys with the SKA[C]//Advancing Astrophysics with the Square Kilometre Array (AASKA14): 17. arXiv: 1501.04035 [astro-ph.CO].
- [130] Spergel D, Gehrels N, Baltay C, et al. Wide-Field InfrarRed Survey Telescope-Astrophysics Focused Telescope Assets WFIRST-AFTA 2015 Report [J]. arXiv e-prints, arXiv:1503.03757:arXiv:1503.03757. arXiv: 1503 . 03757 [astro-ph.IM].
- [131] Amendola L, Appleby S, Avgoustidis A, et al. Cosmology and fundamental physics with the Euclid satellite[J]. Living Reviews in Relativity, 21(1), 2:2. arXiv: 1606.00180 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1007/s41114-017-0010-3.
- [132] Hou J, Sánchez A G, Scoccimarro R, et al. The clustering of the SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey DR14 quasar sample: anisotropic clustering analysis in configuration space[J]. MNRAS, 480(2): 2521-2534. arXiv: 1801.02656 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1093/mnras/sty1984.
- [133] Ruggeri R, Percival W J, Gil-Marín H, et al. The clustering of the SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey DR14 quasar sample: measuring the evolution of the growth rate using redshift-space distortions between redshift 0.8 and 2.2[J]. MNRAS, 483(3): 3878-3887. arXiv: 1801.02891 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1093/mnras/sty3395.
- [134] Zarrouk P, Burtin E, Gil-Marín H, et al. The clustering of the SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey DR14 quasar sample: measurement of the growth rate of structure from the anisotropic correlation function between redshift 0.8 and 2.2[J]. MNRAS, 477(2): 1639-1663. arXiv: 1801.03062 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1093/mnras/sty506.
- [135] Zhao G B, Wang Y, Saito S, et al. The clustering of the SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey DR14 quasar sample: a tomographic measurement of cosmic structure growth and expansion rate based on optimal redshift weights[J]. MNRAS, 482(3): 3497-3513. arXiv: 1801 . 03043 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1093/mnras/sty2845.

-
- [136] Dodelson S, Heitmann K, Hirata C, et al. Cosmic Visions Dark Energy: Science[J]. arXiv e-prints, arXiv:1604.07626: arXiv:1604.07626. arXiv: 1604.07626 [astro-ph.CO].
 - [137] White M, Reid B, Chuang C H, et al. Tests of redshift-space distortions models in configuration space for the analysis of the BOSS final data release[J]. MNRAS, 447(1): 234-245. arXiv: 1408.5435 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1093/mnras/stu2460.
 - [138] Zhang P, Zheng Y, Jing Y. Sampling artifact in volume weighted velocity measurement. I. Theoretical modeling[J]. Phys. Rev. D, 91(4), 043522: 043522. arXiv: 1405.7125 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1103/PhysRevD.91.043522.
 - [139] Zheng Y, Zhang P, Jing Y. Sampling artifact in volume weighted velocity measurement. II. Detection in simulations and comparison with theoretical modeling[J]. Phys. Rev. D, 91(4), 043523: 043523. arXiv: 1409 . 6809 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1103/PhysRevD.91.043523.
 - [140] Bernardeau F, van de Weygaert R. A new method for accurate estimation of velocity field statistics[J]. MNRAS, 279: 693. arXiv: astro - ph / 9508125 [astro-ph]. DOI: 10.1093/mnras/279.2.693.
 - [141] Bernardeau F, van de Weygaert R, Hivon E, et al. The Omega dependence of the velocity divergence distribution[J]. MNRAS, 290(3): 566-576. arXiv: astro-ph/9609027 [astro-ph]. DOI: 10.1093/mnras/290.3.566.
 - [142] Schaap W E, van de Weygaert R. Continuous fields and discrete samples: reconstruction through Delaunay tessellations[J]. A&A, 363: L29-L32. arXiv: astro-ph/0011007 [astro-ph].
 - [143] Pueblas S, Scoccimarro R. Generation of vorticity and velocity dispersion by orbit crossing[J]. Phys. Rev. D, 80(4), 043504: 043504. arXiv: 0809 . 4606 [astro-ph]. DOI: 10.1103/PhysRevD.80.043504.
 - [144] Zheng Y, Zhang P, Jing Y, et al. Peculiar velocity decomposition, redshift space distortion, and velocity reconstruction in redshift surveys. II. Dark matter velocity statistics[J]. Phys. Rev. D, 88(10), 103510: 103510. arXiv: 1308 . 0886 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1103/PhysRevD.88.103510.
 - [145] Jennings E, Baugh C M, Hatt D. Velocity and mass bias in the distribution of dark matter haloes[J]. MNRAS, 446(1): 793-802. arXiv: 1407 . 7296 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1093/mnras/stu2043.

- [146] Yu Y, Zhang J, Jing Y, et al. Kriging interpolating cosmic velocity field[J]. Phys. Rev. D, 92(8), 083527:083527. arXiv: 1505.06827 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1103/PhysRevD.92.083527.
- [147] Yu Y, Zhang J, Jing Y, et al. Kriging interpolating cosmic velocity field. II. Taking anisotropies and multistreaming into account[J]. Phys. Rev. D, 95(4), 043536:043536. arXiv: 1603.05363 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1103/PhysRevD.95.043536.
- [148] Zheng Y, Zhang P, Jing Y. Determination of the large scale volume weighted halo velocity bias in simulations[J]. Phys. Rev. D, 91(12), 123512:123512. arXiv: 1410.1256 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1103/PhysRevD.91.123512.
- [149] Jing Y P. Correcting for the Alias Effect When Measuring the Power Spectrum Using a Fast Fourier Transform[J]. ApJ, 620(2): 559-563. arXiv: astro-ph/0409240 [astro-ph]. DOI: 10.1086/427087.
- [150] Guo H, Zheng Z, Zehavi I, et al. Velocity bias from the small-scale clustering of SDSS-III BOSS galaxies[J]. MNRAS, 446(1):578-594. arXiv: 1407.4811 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1093/mnras/stu2120.
- [151] Abdalla F B, Rawlings S. Probing dark energy with baryonic oscillations and future radio surveys of neutral hydrogen[J]. MNRAS, 360(1): 27-40. arXiv: astro-ph/0411342 [astro-ph]. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2005.08650.x.
- [152] Yang X, Zhang P. Weak lensing reconstruction through cosmic magnification - I. A minimal variance map reconstruction[J]. MNRAS, 415(4): 3485-3496. arXiv: 1105.2385 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2011.18956.x.
- [153] Guo H, Li C, Zheng Z, et al. Constraining the H I-Halo Mass Relation from Galaxy Clustering[J]. ApJ, 846(1), 61:61. arXiv: 1707.01999 [astro-ph.GA]. DOI: 10.3847/1538-4357/aa85e7.
- [154] Favole G, Comparat J, Prada F, et al. Clustering properties of g-selected galaxies at $z \sim 0.8$ [J]. MNRAS, 461(4):3421-3431. arXiv: 1507.04356 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1093/mnras/stw1483.
- [155] Gonzalez-Perez V, Comparat J, Norberg P, et al. The host dark matter haloes of [O II] emitters at $0.5 < z < 1.5$ [J]. MNRAS, 474(3): 4024-4038. arXiv: 1708.07628 [astro-ph.GA]. DOI: 10.1093/mnras/stx2807.
- [156] Bandura K, Addison G E, Amiri M, et al. Canadian Hydrogen Intensity Mapping Experiment (CHIME) pathfinder[C]// Stepp L M, Gilmozzi R, Hall H J.

- Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series: Ground-based and Airborne Telescopes V: vol. 9145: 914522. arXiv: 1406.2288 [astro-ph.IM]. DOI: 10.1117/12.2054950.
- [157] Xu Y, Wang X, Chen X. Forecasts on the Dark Energy and Primordial Non-Gaussianity Observations with the Tianlai Cylinder Array[J]. ApJ, 798(1), 40: 40. arXiv: 1410.7794 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1088/0004-637X/798/1/40.
- [158] McDonald P, Seljak U. How to evade the sample variance limit on measurements of redshift-space distortions[J]. J. Cosmology Astropart. Phys., 2009(10), 007: 007. arXiv: 0810.0323 [astro-ph]. DOI: 10.1088/1475-7516/2009/10/007.
- [159] Hui L, Nicolis A, Stubbs C W. Equivalence principle implications of modified gravity models[J]. Phys. Rev. D, 80(10), 104002: 104002. arXiv: 0905.2966 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1103/PhysRevD.80.104002.
- [160] Zhang P. A Possible Explanation of Vanishing Halo Velocity Bias[J]. ApJ, 869(1), 74: 74. arXiv: 1808.08739 [astro-ph.CO]. DOI: 10.3847/1538-4357/aaec72.
- [161] Scherrer R J, Berlind A A, Mao Q, et al. From Finance to Cosmology: The Copula of Large-Scale Structure[J]. ApJ, 708(1): L9-L13. arXiv: 0909.5187 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1088/2041-8205/708/1/L9.
- [162] Coles P, Jones B. A lognormal model for the cosmological mass distribution.[J]. MNRAS, 248: 1-13. DOI: 10.1093/mnras/248.1.1.
- [163] Kofman L, Bertschinger E, Gelb J M, et al. Evolution of One-Point Distributions from Gaussian Initial Fluctuations[J]. ApJ, 420: 44. arXiv: astro-ph/9311028 [astro-ph]. DOI: 10.1086/173541.
- [164] Taylor A N, Watts P I R. Evolution of the cosmological density distribution function[J]. MNRAS, 314(1): 92-98. arXiv: astro-ph/0001118 [astro-ph]. DOI: 10.1046/j.1365-8711.2000.03339.x.
- [165] Kayo I, Taruya A, Suto Y. Probability Distribution Function of Cosmological Density Fluctuations from a Gaussian Initial Condition: Comparison of One-Point and Two-Point Lognormal Model Predictions with N-Body Simulations[J]. ApJ, 561(1): 22-34. arXiv: astro-ph/0105218 [astro-ph]. DOI: 10.1086/323227.
- [166] Neyrinck M C, Szapudi I, Szalay A S. Rejuvenating the Matter Power Spectrum: Restoring Information with a Logarithmic Density Mapping[J]. ApJ, 698(2):

- L90-L93. arXiv: 0903.4693 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1088/0004-637X/698/2/L90.
- [167] Smith R E, Peacock J A, Jenkins A, et al. Stable clustering, the halo model and non-linear cosmological power spectra[J]. MNRAS, 341(4): 1311-1332. arXiv: astro-ph/0207664 [astro-ph]. DOI: 10.1046/j.1365-8711.2003.06503.x.
- [168] Desjacques V, Jeong D, Schmidt F. The galaxy power spectrum and bispectrum in redshift space[J]. J. Cosmology Astropart. Phys., 2018(12), 035: 035. arXiv: 1806.04015 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1088/1475-7516/2018/12/035.
- [169] Huterer D, Shafer D L. Dark energy two decades after: observables, probes, consistency tests[J]. Reports on Progress in Physics, 81(1), 016901: 016901. arXiv: 1709.01091 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1088/1361-6633/aa997e.
- [170] Chen J, Zhang P, Zheng Y, et al. Accurate Determination of Halo Velocity Bias in Simulations and Its Cosmological Implications[J]. ApJ, 861(1), 58: 58. arXiv: 1803.00728 [astro-ph.CO]. DOI: 10.3847/1538-4357/aaca2f.
- [171] Chen S F, Vlah Z, White M. Modeling features in the redshift-space halo power spectrum with perturbation theory[J]. J. Cosmology Astropart. Phys., 2020(11), 035: 035. arXiv: 2007.00704 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1088/1475-7516/2020/11/035.
- [172] Matsubara T. Resumming cosmological perturbations via the Lagrangian picture: One-loop results in real space and in redshift space[J]. Phys. Rev. D, 77(6), 063530: 063530. arXiv: 0711.2521 [astro-ph]. DOI: 10.1103/PhysRevD.77.063530.
- [173] Song Y S, Zheng Y, Taruya A, et al. Hybrid modeling of redshift space distortions[J]. J. Cosmology Astropart. Phys., 2018(7), 018: 018. arXiv: 1801.04950 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1088/1475-7516/2018/07/018.
- [174] Sheth R K. The distribution of pairwise peculiar velocities in the non-linear regime[J]. MNRAS, 279: 1310. arXiv: astro-ph/9511068 [astro-ph]. DOI: 10.1093/mnras/279.4.1310.
- [175] Juszkiewicz R, Fisher K B, Szapudi I. Skewed Exponential Pairwise Velocities from Gaussian Initial Conditions[J]. ApJ, 504(1): L1-L4. arXiv: astro-ph/9804277 [astro-ph]. DOI: 10.1086/311558.
- [176] Bianchi D, Percival W J, Bel J. Improving the modelling of redshift-space distortions- II. A pairwise velocity model covering large and small scales[J]. MN-

- RAS, 463(4): 3783-3798. arXiv: 1602.02780 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1093/mnras/stw2243.
- [177] Hamilton A J S. Uncorrelated modes of the non-linear power spectrum[J]. MNRAS, 312(2): 257-284. arXiv: astro-ph/9905191 [astro-ph]. DOI: 10.1046/j.1365-8711.2000.03071.x.
- [178] Mitchell T. Machine Learning[M/OL]. McGraw-Hill Education. <https://books.google.com/books?id=xOGAngEACAAJ>.
- [179] Nassif A B, Shahin I, Attili I, et al. Speech Recognition Using Deep Neural Networks: A Systematic Review[J]. IEEE Access, 7: 19143-19165. DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2896880.
- [180] Xu X, Ho S, Trac H, et al. A First Look at Creating Mock Catalogs with Machine Learning Techniques[J]. ApJ, 2013, 772(2), 147: 147. arXiv: 1303.1055 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1088/0004-637X/772/2/147.
- [181] Kodi Ramanah D, Charnock T, Villaescusa-Navarro F, et al. Super-resolution emulator of cosmological simulations using deep physical models[J]. MNRAS, 495(4): 4227-4236. arXiv: 2001.05519 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1093/mnras/staa1428.
- [182] Alves de Oliveira R, Li Y, Villaescusa-Navarro F, et al. Fast and Accurate Non-Linear Predictions of Universes with Deep Learning[J]. arXiv e-prints, arXiv:2012.00240: arXiv:2012.00240. arXiv: 2012.00240 [astro-ph.CO].
- [183] Rodríguez A C, Kacprzak T, Lucchi A, et al. Fast cosmic web simulations with generative adversarial networks[J]. Computational Astrophysics and Cosmology, 5(1), 4: 4. arXiv: 1801.09070 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1186/s40668-018-0026-4.
- [184] Kodi Ramanah D, Charnock T, Lavaux G. Painting halos from cosmic density fields of dark matter with physically motivated neural networks[J]. Phys. Rev. D, 100(4), 043515: 043515. arXiv: 1903.10524 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1103/PhysRevD.100.043515.
- [185] Kasmanoff N, Villaescusa-Navarro F, Tinker J, et al. dm2gal: Mapping Dark Matter to Galaxies with Neural Networks[J]. arXiv e-prints, arXiv:2012.00186: arXiv:2012.00186. arXiv: 2012.00186 [astro-ph.CO].
- [186] Ravanbakhsh S, Oliva J, Fromenteau S, et al. Estimating Cosmological Parameters from the Dark Matter Distribution[J]. arXiv e-prints, arXiv:1711.02033:

- arXiv:1711.02033. arXiv: 1711.02033 [astro-ph.CO].
- [187] Ntampaka M, Eisenstein D J, Yuan S, et al. A Hybrid Deep Learning Approach to Cosmological Constraints from Galaxy Redshift Surveys[J]. *ApJ*, 889(2), 151: 151. arXiv: 1909.10527 [astro-ph.CO]. DOI: 10.3847/1538-4357/ab5f5e.
- [188] Pan S, Liu M, Forero-Romero J, et al. Cosmological parameter estimation from large-scale structure deep learning[J]. *Science China Physics, Mechanics, and Astronomy*, 63(11), 110412: 110412. arXiv: 1908.10590 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1007/s11433-020-1586-3.
- [189] Goodfellow I J, Pouget-Abadie J, Mirza M, et al. Generative Adversarial Networks[J]. arXiv e-prints, arXiv:1406.2661: arXiv:1406.2661. arXiv: 1406.2661 [stat.ML].
- [190] Mirza M, Osindero S. Conditional Generative Adversarial Nets[J]. arXiv e-prints, arXiv:1411.1784: arXiv:1411.1784. arXiv: 1411.1784 [cs.LG].
- [191] Isola P, Zhu J Y, Zhou T, et al. Image-to-Image Translation with Conditional Adversarial Networks[J]. arXiv e-prints, arXiv:1611.07004: arXiv:1611.07004. arXiv: 1611.07004 [cs.CV].
- [192] Zhu J Y, Park T, Isola P, et al. Unpaired Image-to-Image Translation using Cycle-Consistent Adversarial Networks[J]. arXiv e-prints, arXiv:1703.10593: arXiv:1703.10593. arXiv: 1703.10593 [cs.CV].
- [193] He K, Zhang X, Ren S, et al. Deep Residual Learning for Image Recognition [J]. arXiv e-prints, arXiv:1512.03385: arXiv:1512.03385. arXiv: 1512.03385 [cs.CV].
- [194] Ronneberger O, Fischer P, Brox T. U-Net: Convolutional Networks for Biomedical Image Segmentation[J]. arXiv e-prints, arXiv:1505.04597: arXiv:1505.04597. arXiv: 1505.04597 [cs.CV].
- [195] He K, Zhang X, Ren S, et al. Identity Mappings in Deep Residual Networks [J]. arXiv e-prints, arXiv:1603.05027: arXiv:1603.05027. arXiv: 1603.05027 [cs.CV].
- [196] Caldwell R R, Dave R, Steinhardt P J. Cosmological Imprint of an Energy Component with General Equation of State[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 80(8): 1582-1585. arXiv: astro-ph/9708069 [astro-ph]. DOI: 10.1103/PhysRevLett.80.1582.
- [197] Caldwell R R, Linder E V. Limits of Quintessence[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 95(14), 141301: 141301. arXiv: astro-ph/0505494 [astro-ph]. DOI: 10.1103/Phys

- RevLett.95.141301.
- [198] Chiba T, Okabe T, Yamaguchi M. Kinetically driven quintessence[J]. Phys. Rev. D, 62(2), 023511: 023511. arXiv: astro-ph/9912463 [astro-ph]. DOI: 10.1103/PhysRevD.62.023511.
 - [199] Armendariz-Picon C, Mukhanov V, Steinhardt P J. Dynamical Solution to the Problem of a Small Cosmological Constant and Late-Time Cosmic Acceleration[J]. Phys. Rev. Lett., 85(21): 4438-4441. arXiv: astro-ph/0004134 [astro-ph]. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.4438.
 - [200] Armendariz-Picon C, Mukhanov V, Steinhardt P J. Essentials of k-essence[J]. Phys. Rev. D, 63(10), 103510: 103510. arXiv: astro-ph/0006373 [astro-ph]. DOI: 10.1103/PhysRevD.63.103510.
 - [201] Hamed N A, Cheng H S, Luty M A, et al. Ghost Condensation and a Consistent IR Modification of Gravity[J]. Journal of High Energy Physics, 2004(5), 074: 074. arXiv: hep-th/0312099 [hep-th]. DOI: 10.1088/1126-6708/2004/05/074.
 - [202] Carroll S M, Hoffman M, Trodden M. Can the dark energy equation-of-state parameter w be less than -1?[J]. Phys. Rev. D, 68(2), 023509: 023509. arXiv: astro-ph/0301273 [astro-ph]. DOI: 10.1103/PhysRevD.68.023509.
 - [203] Singh P, Sami M, Dadhich N. Cosmological dynamics of a phantom field[J]. Phys. Rev. D, 68(2), 023522: 023522. arXiv: hep-th/0305110 [hep-th]. DOI: 10.1103/PhysRevD.68.023522.
 - [204] Sami M, Toporensky A. Phantom Field and the Fate of the Universe[J]. Modern Physics Letters A, 19(20): 1509-1517. arXiv: gr-qc/0312009 [gr-qc]. DOI: 10.1142/S0217732304013921.
 - [205] Feng B, Wang X, Zhang X. Dark energy constraints from the cosmic age and supernova[J]. Physics Letters B, 607(1-2): 35-41. arXiv: astro-ph/0404224 [astro-ph]. DOI: 10.1016/j.physletb.2004.12.071.
 - [206] Cai Y F, Saridakis E N, Setare M R, et al. Quintom cosmology: Theoretical implications and observations[J]. Phys. Rep., 493(1): 1-60. arXiv: 0909.2776 [hep-th]. DOI: 10.1016/j.physrep.2010.04.001.
 - [207] De Felice A, Tsujikawa S. $f(R)$ Theories[J]. Living Reviews in Relativity, 13(1), 3: 3. arXiv: 1002.4928 [gr-qc]. DOI: 10.12942/lrr-2010-3.
 - [208] Dolgov A D, Kawasaki M. Can modified gravity explain accelerated cosmic expansion?[J]. Physics Letters B, 573: 1-4. arXiv: astro-ph/0307285

- [astro-ph]. DOI: 10.1016/j.physletb.2003.08.039.
- [209] Olmo G J. Post-Newtonian constraints on $f(R)$ cosmologies in metric and Palatini formalism[J]. Phys. Rev. D, 72(8), 083505:083505. arXiv: gr-qc/0505135 [gr-qc]. DOI: 10.1103/PhysRevD.72.083505.
- [210] Faraoni V. Solar system experiments do not yet veto modified gravity models[J]. Phys. Rev. D, 74(2), 023529:023529. arXiv: gr-qc/0607016 [gr-qc]. DOI: 10.1103/PhysRevD.74.023529.
- [211] Navarro I, Van Acoleyen K. $f(R)$ actions, cosmic acceleration and local tests of gravity[J]. J. Cosmology Astropart. Phys., 2007(2), 022:022. arXiv: gr-qc/0611127 [gr-qc]. DOI: 10.1088/1475-7516/2007/02/022.
- [212] Amendola L, Gannouji R, Polarski D, et al. Conditions for the cosmological viability of $f(R)$ dark energy models[J]. Phys. Rev. D, 75(8), 083504:083504. arXiv: gr-qc/0612180 [gr-qc]. DOI: 10.1103/PhysRevD.75.083504.
- [213] Amendola L, Polarski D, Tsujikawa S. Are $f(R)$ Dark Energy Models Cosmologically Viable?[J]. Phys. Rev. Lett., 98(13), 131302:131302. arXiv: astro-ph/0603703 [astro-ph]. DOI: 10.1103/PhysRevLett.98.131302.
- [214] Carroll S M, Sawicki I, Silvestri A, et al. Modified-source gravity and cosmological structure formation[J]. New Journal of Physics, 8(12): 323. arXiv: astro-ph/0607458 [astro-ph]. DOI: 10.1088/1367-2630/8/12/323.
- [215] Song Y S, Hu W, Sawicki I. Large scale structure of $f(R)$ gravity[J]. Phys. Rev. D, 75(4), 044004:044004. arXiv: astro-ph/0610532 [astro-ph]. DOI: 10.1103/PhysRevD.75.044004.
- [216] Bean R, Bernat D, Pogosian L, et al. Dynamics of linear perturbations in $f(R)$ gravity[J]. Phys. Rev. D, 75(6), 064020:064020. arXiv: astro-ph/0611321 [astro-ph]. DOI: 10.1103/PhysRevD.75.064020.
- [217] Faulkner T, Tegmark M, Bunn E F, et al. Constraining $f(R)$ gravity as a scalar-tensor theory[J]. Phys. Rev. D, 76(6), 063505:063505. arXiv: astro-ph/0612569 [astro-ph]. DOI: 10.1103/PhysRevD.76.063505.
- [218] Amendola L, Tsujikawa S. Phantom crossing, equation-of-state singularities, and local gravity constraints in $f(R)$ models[J]. Physics Letters B, 660(3): 125-132. arXiv: 0705.0396 [astro-ph]. DOI: 10.1016/j.physletb.2007.12.041.
- [219] Müller V, Schmidt H, Starobinsky A A. The stability of the de Sitter space-time in fourth order gravity[J]. Physics Letters B, 202(2): 198-200. DOI: 10.1016/037

- 0-2693(88)90007-X.
- [220] Dev A, Jain D, Jhingan S, et al. Delicate $f(R)$ gravity models with a disappearing cosmological constant and observational constraints on the model parameters[J]. Phys. Rev. D, 78(8), 083515: 083515. arXiv: 0807.3445 [hep-th]. DOI: 10.1103/PhysRevD.78.083515.
 - [221] Martinelli M, Melchiorri A, Amendola L. Cosmological constraints on the Hu-Sawicki modified gravity scenario[J]. Phys. Rev. D, 79(12), 123516: 123516. arXiv: 0906.2350 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1103/PhysRevD.79.123516.
 - [222] Cardone V F, Diaferio A, Camera S. Constraining $f(R)$ theories with Type Ia Supernovae and Gamma Ray Bursts[J]. arXiv e-prints, arXiv:0907.4689: arXiv:0907.4689. arXiv: 0907.4689 [astro-ph.CO].
 - [223] Ali A, Gannouji R, Sami M, et al. Background cosmological dynamics in $f(R)$ gravity and observational constraints[J]. Phys. Rev. D, 81(10), 104029: 104029. arXiv: 1001.5384 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1103/PhysRevD.81.104029.
 - [224] Binetruy P, Langlois D. Non-conventional cosmology from a brane-universe[J]. Nuclear Physics B, 565: 269-287. arXiv: hep-th/9905012 [hep-th]. DOI: 10.1016/S0550-3213(99)00696-3.
 - [225] Dvali G, Gabadadze G, Porrati M. 4D gravity on a brane in 5D Minkowski space [J]. Physics Letters B, 485(1-3): 208-214. arXiv: hep-th/0005016 [hep-th]. DOI: 10.1016/S0370-2693(00)00669-9.
 - [226] Lombriser L, Hu W, Fang W, et al. Cosmological constraints on DGP braneworld gravity with brane tension[J]. Phys. Rev. D, 80(6), 063536: 063536. arXiv: 0905.1112 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1103/PhysRevD.80.063536.
 - [227] Xia J Q. Constraining Dvali-Gabadadze-Porrati gravity from observational data[J]. Phys. Rev. D, 79(10), 103527: 103527. arXiv: 0907.4860 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1103/PhysRevD.79.103527.
 - [228] Dubovsky S L, Rubakov V A. Brane-induced gravity in more than one extra dimension: Violation of equivalence principle and ghost[J]. Phys. Rev. D, 67(10), 104014: 104014. arXiv: hep-th/0212222 [hep-th]. DOI: 10.1103/PhysRevD.67.104014.
 - [229] Suyu S H, Marshall P J, Auger M W, et al. Dissecting the Gravitational lens B1608+656. II. Precision Measurements of the Hubble Constant, Spatial Curvature, and the Dark Energy Equation of State[J]. ApJ, 711(1): 201-221. arXiv:

- 0910.2773 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1088/0004-637X/711/1/201.
- [230] Gaudi B S. Microlensing Surveys for Exoplanets[J]. ARA&A, 50: 411-453. DOI: 10.1146/annurev-astro-081811-125518.
- [231] Asgari M, Lin C A, Joachimi B, et al. KiDS-1000 cosmology: Cosmic shear constraints and comparison between two point statistics[J]. A&A, 645, A104: A104. arXiv: 2007.15633 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1051/0004-6361/202039070.
- [232] van Uitert E, Joachimi B, Joudaki S, et al. KiDS+GAMA: cosmology constraints from a joint analysis of cosmic shear, galaxy-galaxy lensing, and angular clustering[J]. MNRAS, 476(4): 4662-4689. arXiv: 1706.05004 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1093/mnras/sty551.
- [233] Tripp R. A two-parameter luminosity correction for Type IA supernovae[J]. A&A, 331: 815-820.
- [234] Abbott T M C, Allam S, Andersen P, et al. First Cosmology Results using Type Ia Supernovae from the Dark Energy Survey: Constraints on Cosmological Parameters[J]. ApJ, 872(2), L30: L30. arXiv: 1811.02374 [astro-ph.CO]. DOI: 10.3847/2041-8213/ab04fa.
- [235] Schutz B F. Determining the Hubble constant from gravitational wave observations[J]. Nature, 323(6086): 310-311. DOI: 10.1038/323310a0.
- [236] Abbott B P, Abbott R, Abbott T D, et al. A gravitational-wave standard siren measurement of the Hubble constant[J]. Nature, 551(7678): 85-88. arXiv: 1710.05835 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1038/nature24471.
- [237] The BICEP/Keck Collaboration, : Ade P A R, et al. Measurements of Degree-Scale B-mode Polarization with the BICEP/Keck Experiments at South Pole [J]. arXiv e-prints, arXiv:1807.02199: arXiv:1807.02199. arXiv: 1807.02199 [astro-ph.CO].
- [238] Ahmed Z, Amiri M, Benton S J, et al. BICEP3: a 95GHz refracting telescope for degree-scale CMB polarization[C]// Holland W S, Zmuidzinas J. Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series: Millimeter, Submillimeter, and Far-Infrared Detectors and Instrumentation for Astronomy VII: vol. 9153: 91531N. arXiv: 1407.5928 [astro-ph.IM]. DOI: 10.1117/12.2057224.
- [239] BICEP2 Collaboration, Ade P A R, Aikin R W, et al. Detection of B-Mode Polarization at Degree Angular Scales by BICEP2[J]. Phys. Rev. Lett., 112(24),

- 241101:241101. arXiv: 1403.3985 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.241101.
- [240] Polarbear Collaboration, Ade P A R, Akiba Y, et al. A Measurement of the Cosmic Microwave Background B-mode Polarization Power Spectrum at Sub-degree Scales with POLARBEAR[J]. ApJ, 794(2), 171:171. arXiv: 1403.2369 [astro-ph.CO]. DOI: 10.1088/0004-637X/794/2/171.
- [241] Suzuki A, Ade P, Akiba Y, et al. The Polarbear-2 and the Simons Array Experiments[J]. Journal of Low Temperature Physics, 184(3-4): 805-810. arXiv: 1512.07299 [astro-ph.IM]. DOI: 10.1007/s10909-015-1425-4.
- [242] POLARBEAR Collaboration, Ade P A R, Aguilar M, et al. A Measurement of the Cosmic Microwave Background B-mode Polarization Power Spectrum at Sub-degree Scales from Two Years of polarbear Data[J]. ApJ, 848(2), 121:121. arXiv: 1705.02907 [astro-ph.CO]. DOI: 10.3847/1538-4357/aa8e9f.
- [243] Hazumi M, Ade P A R, Adler A, et al. LiteBIRD satellite: JAXA's new strategic L-class mission for all-sky surveys of cosmic microwave background polarization [C]// Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series: Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series: vol. 11443: 114432F. arXiv: 2101.12449 [astro-ph.IM]. DOI: 10.1117/12.2563050.
- [244] Montier L, Mot B, de Bernardis P, et al. Overview of the medium and high frequency telescopes of the LiteBIRD space mission[C]// Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series: Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series: vol. 11443: 114432G. arXiv: 2102.00809 [astro-ph.IM]. DOI: 10.1117/12.2562243.
- [245] Li H, Li S Y, Liu Y, et al. Probing Primordial Gravitational Waves: Ali CMB Polarization Telescope[J]. arXiv e-prints, arXiv:1710.03047: arXiv:1710.03047. arXiv: 1710.03047 [astro-ph.CO].
- [246] Salatino M, Austermann J E, Thompson K L, et al. The design of the Ali CMB Polarization Telescope receiver[J]. arXiv e-prints, arXiv:2101.09608: arXiv:2101.09608. arXiv: 2101.09608 [astro-ph.IM].

附录 A 非标准宇宙学模型

在 §1.1.2 中，我们介绍了标准宇宙学的简单唯象推广，并提及了修改引力模型的分类。本章中，我们将更详细地介绍 Λ CDM 的几个替代理论。

A.1 Quintessence 模型

Quintessence 模型通过加入标量场 ϕ 引入负压项^[196]，其作用量为

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{16\pi G} + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_\phi \right). \quad (\text{A-1})$$

这里 $\mathcal{L}_m$ 为物质的拉格朗日量， $\mathcal{L}_\phi$ 为 ϕ 的拉格朗日量

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}(\nabla_\mu \phi)(\nabla^\mu \phi) - V(\phi), \quad (\text{A-2})$$

其中， $V(\phi)$ 为势能项^①。标量场 ϕ 对应的能动张量为

$$T_{\mu\nu}(\phi) = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_\phi)}{\delta g^{\mu\nu}} = (\nabla_\mu \phi)(\nabla_\nu \phi) + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_\phi, \quad (\text{A-3})$$

在 FLRW 度规背景下，标量场能量密度 ρ_ϕ 及压力 p_ϕ 分别为

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (\text{A-4})$$

则状态方程

$$w_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2/2 - V(\phi)}{\dot{\phi}^2/2 + V(\phi)}. \quad (\text{A-5})$$

可以看出 w_ϕ 的取值范围为 $(-1, 1)$ 。

对于曲率为 0 的宇宙，Quintessence 的弗里德曼方程组为

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + \rho_m \right), \quad (\text{A-6})$$

$$\dot{H} = -4\pi G (\dot{\phi}^2 + \rho_m + p_m). \quad (\text{A-7})$$

作用量对 ϕ 求变分，可以得到标量场的运动方程：

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0, \quad (\text{A-8})$$

① 本节的讨论中忽略了辐射、中微子等其他成分的拉格朗日量。

其中, H 为哈勃参数, $V_{,\phi} \equiv \partial V / \partial \phi$ 。显然, Quintessence 的状态方程会随时间演化, 能否满足暗能量在晚期宇宙中成为主导成分取决于标量场势能 $V(\phi)$ 的形式。当 $\dot{\phi}^2 < V$ 时, 状态方程 $w_\phi < -1/3$, 则满足晚期宇宙加速膨胀的要求。文献中常讨论以下两类 Quintessence 模型^[197],

1. 解冻 (thawing) 模型。运动方程 A-8 中的 $3H\dot{\phi}$ 为阻尼项。若开始时标量场被阻尼项冻结, 则状态方程 $w_\phi \approx -1$ 。随着哈勃参数的减小, 阻尼降低, 标量场开始向低势能演化, 同时状态方程逐渐偏离 -1 , 向 $w_\phi \rightarrow 0$ 演化。满足解冻模型的势能形式有 $V(\phi) = M^{4-n}\phi^n, n > 0$, 以及 $V(\phi) = M^4 \exp(-\beta\phi/M_{pl})$ 等, 其中, M_{pl} 为普朗克质量, M 为自由参数。
2. 冻结 (freezing) 模型。冻结模型中, 标量场在早期已经开始向势能低点演化, 但是随着其逐渐成为主导成分, 速度会不断减慢并逐渐停止。冻结模型初始时状态方程 $w_\phi > -1$, 随着标量场的冻结, 逐渐向 $w_\phi \rightarrow -1$ 演化。满足冻结模型的势能形式有 $V(\phi) = M^{4+n}\phi^{-n}, n > 0$, 以及 $V(\phi) = M^{4+n}\phi^{-n} \exp(\alpha\phi^2/M_{pl}^2)$ 等。

A.2 K-essence 模型

理论上, 忽略公式 A-2 中的势能项, 通过单独调节动能项的形式即可以满足加速膨胀的要求。此时可以得到一系列 K-essence 模型^[198-200], 其作用量为

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{16\pi G} + \mathcal{L}_m + p(\phi, K) \right), \quad (\text{A-9})$$

其中, $K \equiv -(1/2)(\nabla_\mu \phi)(\nabla^\mu \phi)$ 为动能项。能动张量为

$$T_{\mu\nu}(\phi) = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}p)}{\delta g^{\mu\nu}} = p_{,K}(\nabla_\mu \phi)(\nabla_\nu \phi) + g_{\mu\nu}p, \quad (\text{A-10})$$

其中, $p_{,K} \equiv \partial p / \partial K$ 。K-essence 的状态方程为

$$w_\phi = \frac{p_{,\phi}}{\rho_\phi} = \frac{p}{2Kp_{,K} - p}. \quad (\text{A-11})$$

K-essence 的一个特例是 Ghost condensate 模型^[201], 其拉氏量为

$$p = -K + \frac{K^2}{M^4}, \quad (\text{A-12})$$

其中, M 为以质量单位的常数。此时状态方程

$$w_\phi = \frac{1 - X/M^4}{1 - 3X/M^4}. \quad (\text{A-13})$$

当 $1/2 < x/M^4 < 2/3$ 时, w_ϕ 的取值范围为 $(-1, -1/3)$, 满足加速膨胀的要求。

A.3 Phantom 模型

若 Quintessence 拉氏量 (公式A-2) 中的动能项取正号:

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}(\nabla_\mu \phi)(\nabla^\mu \phi) - V(\phi), \quad (\text{A-14})$$

则求得的状态方程变为

$$w_\phi = \frac{\dot{\phi}^2/2 + V(\phi)}{\dot{\phi}^2/2 - V(\phi)}. \quad (\text{A-15})$$

当 $\dot{\phi}^2/2 < V(\phi)$ 时, $w_\phi < -1$, 称为幻影理论 (Phantom)^[202-204]。相比宇宙学常数及 Quintessence, 幻影理论会使宇宙更快的加速膨胀, 导致宇宙走向大撕裂 (Big Rip)。

A.4 Quintom 模型

目前的观测表明暗能量状态方程可能跨过 $w = -1$, 而无论 Quintessence ($w > -1$) 还是 Phantom ($w < -1$) 都不能满足要求。Quintom^[205-206]通过结合 Quintessence 与 Phantom, 使暗能量状态方程可以跨过 $w = -1$ 进行演化。最简单的 Quintom 模型只需要引入两个标量场 ϕ_1 、 ϕ_2 , 其中, ϕ_1 为 Quintessence 场, ϕ_2 为 Phantom 场。则该系统对应的拉氏量为

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}(\nabla_\mu \phi_1)(\nabla^\mu \phi_1) - V(\phi_1) + \frac{1}{2}(\nabla_\mu \phi_2)(\nabla^\mu \phi_2) - V(\phi_2). \quad (\text{A-16})$$

解得暗能量状态方程为

$$w_{\text{DE}} = \frac{\dot{\phi}_1^2/2 - V(\phi_1) - \dot{\phi}_2^2/2 - V(\phi_2)}{\dot{\phi}_1^2/2 + V(\phi_1) - \dot{\phi}_2^2/2 + V(\phi_2)}. \quad (\text{A-17})$$

显然, 此时暗能量状态方程可以跨过 -1 。

A.5 $f(R)$ 理论

Quintessence 模型通过引入标量场 ϕ 得到加速膨胀的宇宙学解, 修改引力则直接通过修改时空几何达到同样的目的。最简单的修改引力模型是 $f(R)$ 模型, 仅需将作用量中的里奇标量 R 变为 R 的任意函数 $f(R)$, 其作用量是

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (f(R) + \mathcal{L}_m). \quad (\text{A-18})$$

$f(R)$ 有两种形式, 第一种为度规形式, 场方程通过令作用量对度规求变分得到; 第二种为 Palatini 形式, 认为联络与度规是两个独立变量, 场方程需要令作用

量分别对度规以及联络求变分得到。当用 Palatini 形式的 $f(R)$ 解释晚期宇宙加速膨胀时，或者会与粒子物理标准模型产生矛盾，或者又难以与标准宇宙学模型进行区分^[207]。这里只介绍第一种形式的 $f(R)$ 理论。

作用量对度规求变分可以得到对应的场方程：

$$f_{,R}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}fg_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu f_{,R} + \square f_{,R}g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (\text{A-19})$$

其中， $f_{,R} \equiv \partial f / \partial R$ 。在 FLRW 度规背景下，可以得到对应的弗里德曼方程组：

$$3f_{,R}H^2 = 8\pi G\rho_m + (f_{,R}R - f)/2 - 3H\dot{f}_{,R}, \quad (\text{A-20})$$

$$2f_{,R}\dot{H} = -8\pi G\rho_m - \ddot{f}_{,R} + H\dot{f}_{,R}. \quad (\text{A-21})$$

$f(R)$ 的具体形式拥有很大的自由度，但是需要满足以下几个限制条件：

1. 当 $R \geq R_0 (> 0)$ 时， $f_{,R} > 0$ 。 R_0 为现在的里奇标量。该条件保证不会出现反引力。
2. 当 $R \geq R_0$ 时， $f_{,RR}(R) > 0$ 。该条件是本地引力测试^[208-211]、确保存在物质主导时期^[212-213]、以及宇宙学扰动稳定性的共同要求^[214-217]。
3. 当 $R \gg R_0$ 时， $f(R) \rightarrow R - 2\Lambda$ 。该条件是本地引力测试^[218]、以及确保存在物质主导时期的要求^[212]。
4. 当 $r = -Rf_{,R}/f = -2$ 时， $0 < (Rf_{,RR}/f_{,R}) \leq 1$ 。该条件来自晚期宇宙的限制^[212,219]。

下面列举的几个模型都满足上述条件，

$$f(R) = -R - \mu R_c \frac{(R/R_c)^{2n}}{(R/R_c)^{2n} + 1}, \quad \text{其中, } n, \mu, R_c > 0, \quad (\text{A-22})$$

$$f(R) = -R - \mu R_c \left[1 - \left(1 + \frac{R^2}{R_c^2} \right)^{-n} \right], \quad \text{其中, } n, \mu, R_c > 0, \quad (\text{A-23})$$

$$f(R) = -R - \mu R_c \tanh\left(\frac{|R|}{R_c}\right), \quad \text{其中, } \mu, R_c > 0. \quad (\text{A-24})$$

为了跟 Λ CDM 对比，可以将方程组 A-20 进一步写为

$$3AH^2 = 8\pi G(\rho_m + \rho_R + \rho_{\text{DE}}) \quad (\text{A-25})$$

$$-2A\dot{H} = 8\pi G\left(\rho_m + \frac{4}{3}\rho_R + \rho_{\text{DE}} + p_{\text{DE}}\right) \quad (\text{A-26})$$

其中， A 为任一常数。等效的暗能量能量密度 ρ_{DE} 与压强 p_{DE} 分别为

$$8\pi G\rho_{\text{DE}} \equiv \frac{1}{2}(f_{,R}R - f) - 3H\dot{f}_{,R} + 3H^2(A - f_{,R}) \quad (\text{A-27})$$

$$8\pi Gp_{\text{DE}} \equiv \ddot{f}_{,R} + 2H\dot{f}_{,R} - \frac{1}{2}(f_{,R}R - f) - (3H^2 + 2\dot{H})(A - f_{,R}) \quad (\text{A-28})$$

由公式A-25及A-26可得状态方程为

$$w_{\text{DE}} \equiv \frac{p_{\text{DE}}}{\rho_{\text{DE}}} = -\frac{2A\dot{H} + 3AH^2 + 8\pi G\rho_{\text{R}}/3}{3AH^2 - 8\pi G\rho_{\text{m}}} . \quad (\text{A-29})$$

可以进一步写为

$$w_{\text{DE}} \simeq \frac{w_{\text{eff}}}{1 - (f_{,R}/A)\Omega_{\text{m}}} , \quad (\text{A-30})$$

其中, $w_{\text{eff}} = -1 - 2\dot{H}/(3H^2)$, 为所有成分总体的有效状态方程。 $f(R)$ 可以在不违反系统稳定性的条件下, 产生一个 Phantom 的状态方程, 即满足 $w_{\text{DE}} < -1$ 。观测中对 $f(R)$ 的限制可以参考 Dev et al. [220], Martinelli et al. [221], Cardone et al. [222], Ali et al. [223]

A.6 DGP 模型

DGP(Dvali-Gabadadze-Porrati) 模型^[224-225]假设我们的宇宙是一个嵌在五维闵可夫斯基时空体 (bulk) 中的四维膜 (brane)。除引力外所有相互作用都被限制在四维膜内, 而引力可以在五维体中传播。DGP 的作用量为

$$S = \int d^5x \sqrt{-g^{(5)}} \frac{R}{16\pi G^{(5)}} + \int d^4x \sqrt{-g} \frac{R}{16\pi G} + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m . \quad (\text{A-31})$$

其中, 角标 (5) 代表该量是五维体中的量。

五维时空中的线元为

$$ds^2 = N^2(t, \xi) dt^2 - A^2(t, \xi) \gamma_{ij} dx^i dx^j - B^2(t, \xi) d\xi^2 . \quad (\text{A-32})$$

其中, ξ 为第五维坐标。若四维膜由平直的 FLRW 度规所描述, 则求解场方程得到的弗里德曼方程为

$$H^2 \pm \frac{H}{r_c} = \frac{8\pi G}{3} \rho , \quad (\text{A-33})$$

其中, r_c 为临界尺度,

$$r_c \equiv \frac{M_{pl}^2}{2[M_{pl}^{(5)}]^2} , \quad (\text{A-34})$$

M_{pl} 与 $M_{pl}^{(5)}$ 分别为四维时空与五维时空中的普朗克质量。早期宇宙中, 当 $H^{-1} \ll r_c$ 时, 公式A-33中的第二项可以忽略, 方程变为通常的弗里德曼方程, DGP 理论退化为通常的四维时空理论。随着 H 不断减小, 当 $H^{-1} \gg r_c$ 时, (1) 若公式A-33中的第二项取正号, 则 $H \rightarrow H_\infty = 1/r_c$, 即对应晚期膨胀宇宙的解; (2) 若取负号, 则 $H \rightarrow H_\infty = \rho/(6M_{pl(5D)}^3)$, 此时会得到一个减速宇宙解。DGP 可以解释宇宙学常数问题: 当特征尺度大于 r_c 时, 引力会进入五维体中传播, 导致四维膜上的引力变弱。但是 DGP 与多种观测结果存在偏差^[226-227]。此外, DGP 还会引入鬼域 (ghost field) 问题^[228]。

附录 B 更多宇宙学探针

B.1 弱引力透镜

星系发出的光线受到前景物质引力势的影响会发生偏折，导致观测到的星系在大小、形状及亮度上发生改变，这种现象称为引力透镜效应。引力透镜效应又分为强引力透镜、弱引力透镜、微引力透镜。强引力透镜通过测量 time delay 可以用来限制哈勃参数^[229]；微引力透镜可以用作系外行星的搜寻^[230]；与大尺度结构最相关的是弱引力透镜。对 $z \sim 1$ 处的星系，弱引力透镜造成的形变量约为 $\sim 1\%$ 。

若星系原始图像为 (x_0, y_0) ，经引力透镜作用后变为 (x_l, y_l) ，则二者的关系可用如下公式描述：

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \gamma_1 - \kappa & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 + \gamma_1 - \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_l \\ y_l \end{pmatrix}, \quad (\text{B-1})$$

其中， $\gamma_{1,2}$ 描述星系的剪切形变 (shear)。 κ 描述星系大小及亮度的改变，称为会聚 (convergence)。引入约化的剪切形变 (reduced shear) $g_{1,2}$ ，其中， $g_i = \gamma_i / (1 - \kappa)$ 。则公式B-1可以写为

$$\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} = (1 - \kappa) \begin{pmatrix} 1 - g_1 & -g_2 \\ -g_2 & 1 + g_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_l \\ y_l \end{pmatrix}. \quad (\text{B-2})$$

剪切形变会使星系的椭圆率发生改变，椭圆率与星系投影的二阶矩 Q_{ij} 有关。设星系的轮廓为 $I(\mathbf{x})$ ，则二阶矩为

$$Q_{ij} = \frac{\int d^2x I(\mathbf{x}) W(\mathbf{x}) x_i x_j}{\int d^2x I(\mathbf{x}) W(\mathbf{x})}, \quad (\text{B-3})$$

其中， i, j 的取值分别为 1 或 2， $x_{1,2}$ 对应投影面中两个正交方向， $W(\mathbf{x})$ 为权重函数。椭圆率为

$$e = e_1 + ie_2 = \frac{Q_{11} - Q_{22} + 2iQ_{12}}{Q_{11} + Q_{22}}. \quad (\text{B-4})$$

弱引力透镜对椭圆率的改变远远小于星系的内禀椭圆率。若假设内禀椭圆率的取向完全随机，那么对大量星系取系综平均，其内禀椭圆率会相互抵消，从而可以得到约化的剪切形变 $g_{1,2}$ 。

同密度场一样，可以定义剪切场的关联函数

$$\hat{\xi}_{\pm}(\theta) = \langle \hat{g}_+ \hat{g}_+ \rangle(\theta) \pm \langle \hat{g}_\times \hat{g}_\times \rangle(\theta), \quad (\text{B-5})$$

其中, $|\theta|$ 为星系对在天球上投影的角间距。 $\hat{g}_+$ 与 $\hat{g}_\times$ 为相对剪切形变, 是 $\hat{g}$ 分别在星系对连线方向, 及 $\pi/4$ 方向上的投影。由于对称性, $\langle \hat{g}_+ \hat{g}_\times \rangle = 0$ 。剪切场关联函数的理论值由会聚场功率谱的汉克尔变换决定:

$$\xi_{\pm}(\theta) = \int \frac{\ell d\ell}{2\pi} J_{0/4}(\ell\theta) [P_{\kappa}^E(\ell) \pm P_{\kappa}^B(\ell)] . \quad (\text{B-6})$$

上标 E, B 分别代表功率谱中的无旋分量及有旋分量。理论上透镜在一阶近似下只产生 E 模, 但是一些系统误差会引起不可忽略的 B 模信号, 如点扩散函数 (Point spread function, PSF)、测量误差、以及星系内禀取向 (Intrinsic Alignment, IA)。若测量结果中存在 B 模成分, 则可以判定存在系统误差。但反之并非所有系统误差都会产生 B 模信号, 因此不能因为 B 模信号不存在而判断没有系统误差。

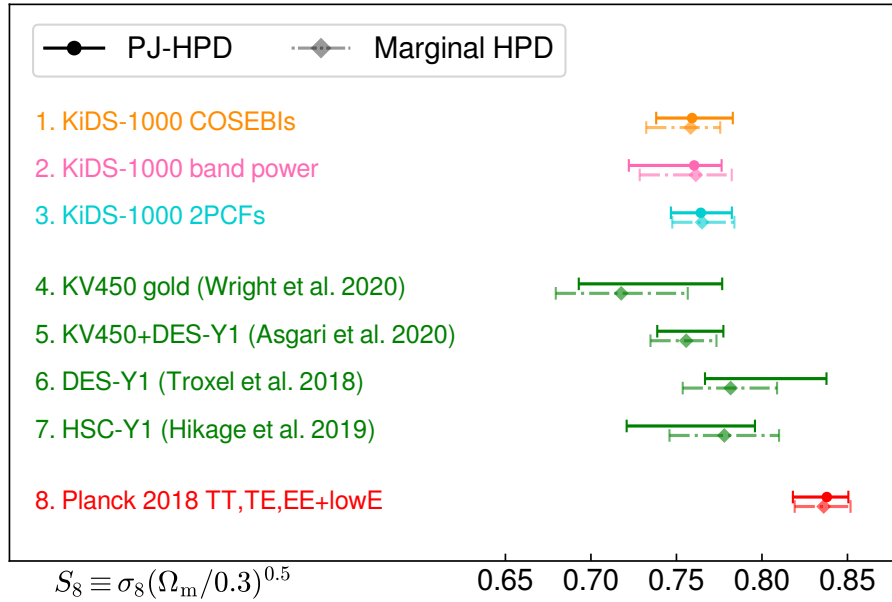


图 B-1 弱引力透镜对 S_8 的限制^[231]。

Figure B-1 Constraints on S_8 ^[231].

在平直宇宙中, 对于天空中某视线方向 $\hat{\theta}$, 会聚效应为

$$\kappa(\hat{\theta}) = \frac{3H_0^2\Omega_m}{2c^2} \int_0^\chi \frac{d\chi' q(\chi')}{a(\chi')} \delta(\chi\hat{\theta}) , \quad (\text{B-7})$$

其中, c 为光速, χ 为共动距离。定义透镜效率函数为

$$q(\chi) = \int_\chi^\infty d\chi' n(\chi') \frac{\chi' - \chi}{\chi'} . \quad (\text{B-8})$$

其中, n 为星系数密度。因此, 会聚场的功率谱由物质功率谱决定。

弱引力透镜直接响应前景物质的分布，因此对 Ω_m 与 σ_8 两个宇宙学参数最为敏感 (关于 σ_8 的定义参见 §2.1 脚注。)。实际观测中，常将二者归纳为一个参数 $S_8 \equiv \sigma_8(\Omega_m/0.3)^\gamma$ ，其中， γ 常取 0.5，也可作为自由参数。图 B-1 展示了不同观测项目利用引力透镜对 S_8 的限制结果^[232]。

B.2 Ia 型超新星

白矮星吸积伴星或大质量恒星塌缩，都有可能产生导致内核温度急剧升高，产生爆炸，从而形成超新星。超新星根据其光谱中的吸收线特征分为 I 类 (无 H 线) 及 II 类 (有 H 线)。I 类超新星又根据其有无电离硅分为 Ia 型 (有 Si II 线) 与 Ib 型 (无 Si II 线)。Ia 型超新星峰值亮度的弥散在经过修正后可以降低到 $\sim 0.1 - 0.2$ ，因此常被用作“标准烛光”。Riess et al. [1], Perlmutter et al. [2] 通过对超新星的观测，发现了宇宙加速膨胀的直接证据，并因此斩获 2011 年诺贝尔物理学奖。

超新星宇宙学通过测量光度距离 $d_L(z)$ 限制宇宙学。通常使用对数距离

$$\mu = 5 \log d_L + 25 = m_f - M_f \quad (\text{B-9})$$

其中， m_f 为视星等， M_f 为绝对星等，下标 f 表示两者是同一静止参考系 f 下的测量值。在实际观测中，对数距离可以由改进的 Tripp 拟合公式^[233]给出：

$$\mu = m_B + \alpha x_1 - \beta \mathcal{C} + M_0 + \gamma G_{\text{host}} + \Delta\mu_{\text{bias}}. \quad (\text{B-10})$$

其中， $m_B \equiv -2.5 \log(x_0)$ 。通过拟合光变曲线^①，可以得到振幅 x_0 ，光变曲线宽度 x_1 ，以及颜色 $\mathcal{C}$ 。 G_{host} 依赖于宿主星系的恒星质量 M_{host} ，若 $M_{\text{host}} > 10^{10} M_\odot$ ，则 $G_{\text{host}} = +1/2$ ，若 $M_{\text{host}} < 10^{10} M_\odot$ ，则 $G_{\text{host}} = -1/2$ 。 α, β, γ 和 M_0 为拟合参数。 α, β, γ 分别描述超新星亮度与光变曲线宽度，颜色，宿主星系恒星质量的关系， M_0 则与绝对星等和哈勃常数有关。 $\Delta\mu_b$ 描述选择效应产生的偏袒，可以通过数值模拟确定。

图 B-2 展示了 DES-SN3YR 数据 (暗能量巡天 DES 超新星样本 + low-z 样本) 对两种宇宙学的限制。左侧为 Λ CDM 模型，在平直宇宙假设下， $\Omega_m = 0.331 \pm 0.038$ ， $\Omega_\Lambda = 0.669 \pm 0.038$ ；结合 Planck 微波背景辐射与 SDSS 重子声波振荡数据后的限制为 $\Omega_m = 0.308 \pm 0.007$ ， $\Omega_\Lambda = 0.690 \pm 0.008$ 。右侧为平直宇宙的 w CDM 模型，在结合 Planck 微波背景辐射与 SDSS 重子声波振荡数据后的限制为， $\Omega_m = 0.311 \pm 0.009$ ， $w = 0.977 \pm 0.047$ ，结果与 Λ CDM 模型一致。目前超新星宇宙学的系统误差主要来自于尘埃消光、超新星颜色和光度的修正等。

① 光变曲线为描述天体亮度随时间变化的曲线。

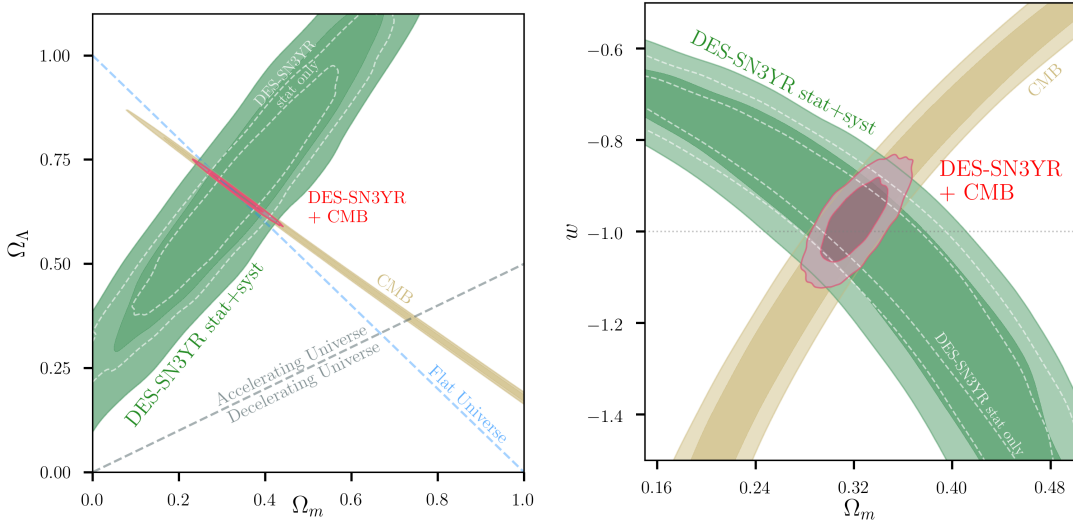


图 B-2 DES-SN3YR 对宇宙学参数 Ω_m 及 Ω_Λ 的限制^[234]。左侧为 Λ CDM 模型，右侧为平直 w CDM 模型。

Figure B-2 Constraints on cosmological parameter Ω_m and Ω_Λ for Λ CDM (left) and flat w CDM (right) from DES-SN3YR samples^[234].

B.3 引力波

标准汽笛 高频引力波的种类大致可以分为三种：(1) 致密双星/双黑洞/致密星-黑洞系统绕转/并合产生的引力波。(2) 单个致密天体如中子星，由于不是完美的球体，在自旋时会产生连续的引力波信号。(3) 一直存在于背景中的各种随机引力波。**LIGO** 等探测项目主要针对的是第一种引力波，其性质主要由三个参数描述，绕转频率 f 、频率随时间的变化率 $\dot{f}$ 、以及引力波振幅。通过这三个参数可以计算系统中致密星或黑洞的质量，确定其光度距离，从而测量哈勃常数^[235]，因此也被称为“标准汽笛”。2017 年，Abbott et al. [236] 第一次利用引力波数据给出了哈勃常数的限制，得到的结果为 $H_0 = 70^{+12.0}_{-8.0} \text{ km/s/Mpc}$ 。

原初引力波 暗物质与暗能量的起源需要追溯到 **CMB** 之前，理论上可以探测更早期宇宙的手段有中微子背景辐射与原初引力波。不同于上文中提到的 **LIGO** 所能探测到的由双星或黑洞并合产生的引力波，原初引力波是暴涨过程中的张量扰动引起的。由于原初引力波信号十分微弱，想要直接对其进行探测几乎无法实现。幸运的是，原初引力波会在 **CMB** 图像上产生 **B** 模偏振。因此，通过探测 **CMB** 的 **B** 模偏振，我们可以直接检验暴涨理论。

图B-3展示了暴涨理论预言的极化功率谱以及目前观测给出的结果。红色实

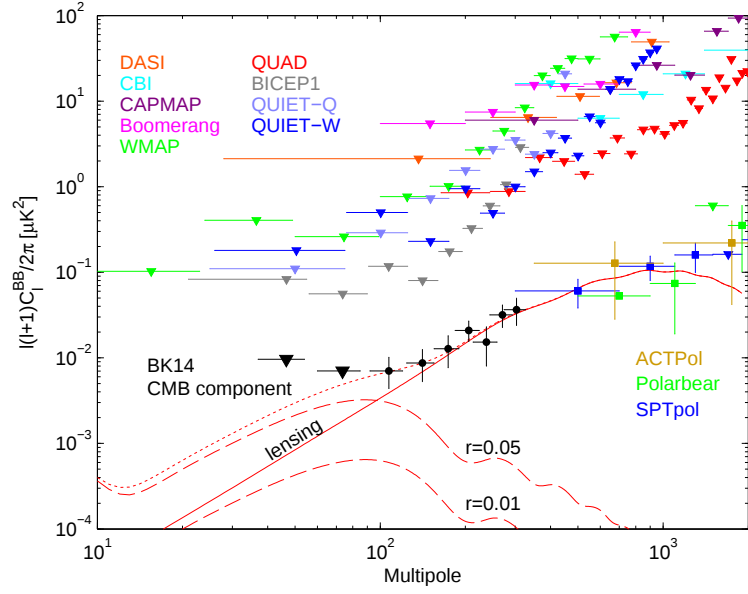


图 B-3 目前 B 模功率谱的测量结果^[237]。红色曲线为理论最佳拟合结果，实线为 lensing 产生的信号，两条虚线对应原初引力波信号的极限范围。不同颜色的数据点及误差棒为目前观测给出的结果。

Figure B-3 Published B-modes power spectra as of March 2018^[237]. Red solid line is the lensing signal. The two red dashed lines correspond the GW signals for $r = 0.05$ and $r = 0.01$. Data points with errorbars are the measurements from various telescopes.

线为引力透镜引起的 B 模信号，其峰值约位于 $\ell \sim 1000$ 。引力波引起的 B 模信号为红色虚线，其峰值约位于 $\ell \sim 80$ 。因此，要测量到原初 B 模信号，需要在较大张角持续观测，不断提升信噪比。设立在南极的 BICEP/KECK 项目^[237-239]，智利的 PolarBear 望远镜^[240-242]，太空项目 LiteBIRD^[243-244]，以及中国的 Ali-CPT^[245-246]等，都试图在 CMB 的极化谱中寻找原初 B 模信号。

附录 C 补充数学公式

C.1 耦合函数

对 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 若其联合概率分布函数为

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (\text{C-1})$$

则其联合累积分布函数

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) dx'_1 dx'_2 \cdots dx'_n. \quad (\text{C-2})$$

其边缘累积分布函数

$$F_{X_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{x_i} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, \dots, X_i, \dots, X_n}(x'_1, \dots, x'_i, \dots, x'_n) dx'_1 \cdots dx'_i \cdots dx'_n, \quad (\text{C-3})$$

其中, $i = 1, 2, \dots, n$ 。若联合累积分布函数 $F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 连续, 则耦合函数 (Copula) 满足

$$C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \dots, F_{X_n}(x_n)) = F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (\text{C-4})$$

即可以使用边缘累积分布函数及耦合函数完全表示联合累积分布函数。

例如, 对于两个相互独立的随机变量 X, Y , 其联合累积分布函数 $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$, 因此, 耦合函数满足 $C(u, v) = uv$ 。

另如, 对于 2 维标准高斯分布 (期望 $\mu_{X,Y} = 0$, 方差 $\sigma_{X,Y}^2 = 1$, 相关系数 $-1 < \rho < 1$), 其联合概率分布函数

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right]. \quad (\text{C-5})$$

则耦合函数满足

$$C_\rho(u, v) = \Phi_\rho^{(2)}(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)). \quad (\text{C-6})$$

其中, $\Phi_\rho^{(2)}$ 为相关系数为 ρ 的 2 维标准高斯联合累积分布函数, Φ^{-1} 为 1 维标准高斯累积分布函数的逆。

C.2 矩及矩母函数

对任意正整数 n ，随机变量 X 的 n 阶矩 (n th moment) 的定义为

$$\mu_n \equiv \langle X^n \rangle. \quad (\text{C-7})$$

顾名思义，矩母函数 (moment generating function, mgf) 是可以用来求矩的函数。随机变量 X 的矩母函数的定义为

$$M_X(t) \equiv \langle e^{tX} \rangle, \quad (\text{C-8})$$

且要求在 $t = 0$ 的某邻域内上式中的期望存在。显然，若随机变量 X 的概率分布函数 (probability distribution function, pdf) 为 $f_X(x)$ ，那么

$$M_X(t) = \int e^{tX} f_X(x) dx, \quad (\text{C-9})$$

随机变量 X 的矩

$$\mu_n = \left. \frac{d^n}{dt^n} M_X(t) \right|_{t=0}. \quad (\text{C-10})$$

C.3 累积量及累积量母函数

随机变量 X 的累积量母函数的定义为

$$S_X(t) \equiv \log M_X(t) = \log \langle e^{tX} \rangle. \quad (\text{C-11})$$

其中， $M_X(t)$ 为 X 的矩母函数。累积量母函数泰勒级数的展开系数称为累积量

$$s_n = \left. \frac{d^n}{dt^n} S_X(t) \right|_{t=0}. \quad (\text{C-12})$$

不难证明，1、2 阶累积量分别对应随机变量的期望 $\mu = \langle X \rangle$ 及方差 $\sigma^2 = \langle (X - \mu)^2 \rangle$ 。